МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А.Х. Шахмейстер

УРАВНЕНИЯ

Практикум
Тренинг
Контроль

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
Заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш,
Заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Уравнения. — 4-е издание — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2011. — 264с.: илл. — ISBN 978-5-94057-792-8, ISBN 978-5-98712-022-4, ISBN 978-5-91281-050-3.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов, преподавателей.

ISBN 978-5-94057-792-8 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-022-4 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-050-3 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 9-11 классов (20-25 уроков).

№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий
1	**Линейные уравнения (стр. 5 – 7)** Практикум 1.
2 – 3	**Линейные уравнения (стр. 13 – 42)** Практикумы 2 – 3. Тренировочная работа 3 (5, 12). Тренировочная работа 4 (7, 10, 12). Проверочная работа 3 (7, 9, 11).
4 – 6 (+1)	**Квадратные уравнения (стр. 41 – 72)** Практикумы 5 – 8. Тренировочная карточка 2 (2, 3, 6, 8, 9, 10). Тренировочная работа 5 (1, 2 (т. Виета), 3 (т. Виета), 7, 12, 14). Тренировочная работа 6 (1 (т. Виета), 7, 11, 12).
7 – 10 (+1)	**Уравнения содержащие модуль (стр. 74 – 92)** Практикум 9. Тренировочная работа 8 (2, 3, 5, 9, 12). Проверочная работа 5 (3, 4, 8, 9, 10, 11, 12).
11 – 15 (+2)	**Уравнения высших степеней (стр. 93 – 147)** Метод подстановки. Практикум 10. Тренировочная работа 8 (2, 5, 6, 13, 14) Применение теории делимости для решения уравнений. Практикум 11. Возвратные уравнения. Практикум 12 (1, 2, 3, 4). Тренировочная работа 9 (1, 3, 4, 11, 14, 16, 17). Еще несколько способов решения уравнений (стр. 136 – 146) (нестандартные способы). Примеры (2, 4, 6, 7, 12).
16 – 20 (+1)	**Карточки заданий (стр. 160 – 261)** (обобщение и закрепление) Карточка 1 (1, 3, 5, 6). Карточка 2 (2, 3, 5, 6). Карточка 3 (2, 6). Карточка 4 (3, 5). Карточка 6 (5, 6). Карточка 8 (2, 6). Зачетные карточки (2, 5, 8).

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Линейные уравнения

Для того чтобы разобраться, что такое уравнение и дать его определение, напомним определения алгебраического выражения и равенства.

Определение 1. ***Соединение*** *чисел и букв в записи знаками арифметических действий и скобками называется* ***алгебраическим выражением.***

Определение 2. ***Равенством*** *называется соединение двух алгебраических выражений двумя горизонтальными черточками = (знаком равенства).*

Очевидно, что равенство может быть истинным, а может быть и ложным при разных значениях букв, входящих в него.

Пример 1. $1+a=2a-(a-1)$.
После преобразований правой части равенства:
$1+a=2a-a+1$ получим: $a+1=a+1$.
Значит, данное равенство справедливо (истинно) при любых значениях буквы a.

Пример 2. $(2a+5)-2(a+1)=4$.
После преобразования левой части равенства имеем:
$2a+5-2a-2=4$; $3=4$ – ложь. Значит, данное равенство ложно при любых значениях буквы a.

Пример 3. $3(3a+2)-a=2a$.
После преобразования левой части равенства имеем:
$9a+6-a=2a$; $8a+6=2a$.
Пусть $a=0$, получим $6=0$ – ложно.
Пусть $a=-1$, получим $8(-1)+6=2(-1)$; $-2=-2$ – истинно.
Интересно получилось, что при каком-то значении a равенство ложно, а при каком-то значении a равенство истинно. В связи с этими наблюдениями дадим два определения, связанные с классификацией равенств.

Определение 3. *Равенство, справедливое (верное) для любых значений букв, входящих в правую и левую его часть, называется* ***тождеством.***

Определение 4. *Равенство, справедливое не для всех значений букв, входящих в правую и левую часть, называется* ***уравнением.***

Примечание. В зависимости от скольких букв, не являющихся постоянными, уравнения бывают с одним неизвестным (скажем, буквой x), с двумя неизвестными (скажем буквами x и y) и т. д.

Пример 4. $4abx+3a=5$.

Здесь мы имеем буквы $a; b; x$, но нас интересует вопрос, только относительно неизвестного x, т.е. при каких его значениях выраженных через числа и буквы a и b, уравнение обращается в истинное равенство.

Пример 5. $4x+5y=7$.
Если нас интересует вопрос, при каких значениях x и y равенство справедливо, то это уравнение с двумя неизвестными x и y, и т. д.

Теперь, после того как мы разобрались в первом приближении, что такое уравнение, выясним, что называется «корнем» уравнения.

Определение 5. ***Корнем*** *уравнения называется такое значение неизвестного (выраженного через числа или буквы), при котором уравнение обращается в истинное равенство (тождесто).*

Примечание. Решить уравнение – это значит найти все его корни или убедиться, что их нет.

Определение 6. ***Уравнением n-й степени*** *называется уравнение вида* $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$

Пример 6. $2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 10x^2 - x + 3 = 0$.
Это уравнение пятой степени. Сейчас мы будем рассматривать только уравнения первой степени (линейные), где $n = 1$, т. е. вида $a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$.

Иногда его записывают иначе, т. е. в виде $kx + b = 0$ $(k \neq 0)$, но это принципиального значения не имеет.

Продолжим далее: уравнение – это равенство, справедливое для определенных значений неизвестного, то имеет смысл напомнить свойства числовых равенств.

Свойства числовых равенств

1. Любое число a равно самому себе (свойство рефлексивности).
2. Если $a = b$, то $b = a$ (свойство симметричности).
3. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (свойство транзитивности).
4. Если $a = b$ и c – любое число, то $a + c = b + c$ (свойство стабильности (монотонности) сложения).
5. Если $a = b$ и c – любое число, то $ac = bc$ (свойство стабильности (монотонности) умножения).

Если обе части истинного равенства умножить на одно и то же не нулевое число, то получится истинное равенство. Аналогичными свойствами обладают и алгебраические равенства.

Практикум 1

Решите уравнения:

1. $3x+2=0$.
Применяя свойства преобразования алгебраических выражений, получим
$3x+2=0$ (вычтем 2 или прибавим -2);
$(3x+2)-2=-2$; $3x+2-2=-2$;
$3x=-2$ (умножим на $\frac{1}{3}$);
$3\cdot\frac{1}{3}x=-\frac{2}{3}$; $x=-\frac{2}{3}$.
Ответ: $x=-\frac{2}{3}$.

Естественно, в дальнейшем мы не будем расписывать столь подробно, полагая (по умолчанию), какие свойства и как мы будем использовать для решения уравнения.

2. $2(x-3)=x+1$.
$2x-6=x+1$ (перенесем неизвестные в одну сторону, а числа – свободные члены – в другую с противоположными знаками). Получим $x=7$.

Ответ: $x=7$.

3. $3(2-x)-2(2x+1)=3$.
(не забудем, что $-(a+b)=-a-b$);
$6-3x-4x-2=3$; $-7x+4=3$; $4-3=7x$; $1=7x$; $x=\frac{1}{7}$.
Ответ: $x=\frac{1}{7}$.

4. $5(x-2)-3(x-2)=x-1$ (не забудем, что $-(a-b)=-a+b$);
$5x-10-3x+6=x-1$; $5x-3x-x=-1+4$; $x=3$.
Ответ: $x=3$.

5. $\frac{1}{3}(2x+1)-\frac{1}{2}(2-3x)=x \quad |\cdot 6$.

Чтобы было проще, приведем уравнение к виду только с целыми коффициентами. Для этого умножим обе части уравнения на общий знаменатель для числовых дробей.

$6\cdot\frac{1}{3}(2x+1)-6\cdot\frac{1}{2}(2-3x)=6\cdot x$; $2(2x+1)-3(2-3x)=6x$;

$4x+2-6+9x=6x$; $13x-6x=4$; $7x=4$; $x=\frac{4}{7}$.

Ответ: $x=\frac{4}{7}$.

6. $\frac{x-3}{5}+\frac{x+2}{4}=\frac{1}{2} \quad |\cdot 20$;

$4(x-3)+5(x+2)=10$; $4x-12+5x+10=10$; $9x=12$; $x=\frac{4}{3}$.

Ответ: $x=1\frac{1}{3}$.

7. $3\left(2x-\frac{1}{3}\right)-2\left(x+\frac{1}{2}\right)=4x$;

$6x-1-2x-1=4x$.

Здесь $-2=0$, но это равенство ложное и не зависит от значения x. Это значит, что уравнение не имеет решения, иногда это записывают так: $x\in\varnothing$ ($\varnothing$ – знак пустого множества, т. е. не содержащего ни одного элемента).

Ответ: корней нет.

8. $-2\left(3+\frac{1}{2}x\right)+3\left(2-\frac{1}{3}x\right)+2x=0$;

$-6-x+6-x+2x=0$.

Здесь $0=0$, но это истинное равенство независимо от значения x, значит любое значение x – есть решение (иногда записывают так: $\forall x\in R$ – решение, где $\forall$ – символ, обозначающий любое число или $(-\infty;\infty)$, т. е. x – принадлежит всей числовой оси, $\in$ – символ принадлежности).

Ответ: $(-\infty;\infty)$.

Тренировочная работа 1

Решите уравнения:

1. $2(x-3)+3(3-2x)-4(3x-2)=5(4-5x)$.

2. $\dfrac{3+x}{2}-\dfrac{2x+7}{3}=2$.

3. $\dfrac{3-x}{2}-\dfrac{7-2x}{3}=4$.

4. $\dfrac{(2x-1)2}{3}-\dfrac{3(6+x)}{4}=1\dfrac{1}{2}$.

5. $\dfrac{3(3x+1)-4}{5}-\dfrac{2(2x+3)+6}{3}=4$.

6. $\dfrac{(5x-1)\cdot 1{,}2-3{,}2}{3}-\dfrac{1{,}3\cdot(2+3x)-4{,}2}{4}=1$.

7. $2{,}3(4x+0{,}2)-1\dfrac{3}{7}(0{,}3-2x)=1$.

8. $\dfrac{2{,}6\left(3x-3\dfrac{1}{2}\right)-2{,}1}{1{,}2}-\dfrac{2{,}7\left(2\dfrac{1}{4}-2{,}1x\right)-1}{0{,}7}=10$.

Решение тренировочной работы 1

Решите уравнения:

1. $2(x-3)+3(3-2x)-4(3x-2)=5(4-5x)$;

$\underline{2x}-6+9-\underline{6x}-\underline{12x}+8=20-\underline{25x}$

$25x-16x=20-11$; $9x=9$; $x=1$.

Ответ: $x=1$.

2. $\frac{3+x}{2}-\frac{2x+7}{3}=2 \quad |\cdot 6 \qquad -(a+b)=-a-b$

$3(3+x)-2(2x+7)=2\cdot 6$;

$9+3x-4x-14=12$; $-x-5=12$; $x=-17$.

Ответ: $x=-17$.

3. $\frac{3-x}{2}-\frac{7-2x}{3}=4 \quad |\cdot 6 \qquad -(a-b)=-a+b$

$3(3-x)-2(7-2x)=4\cdot 6$; $9-3x-14+4x=24$; $x=29$.

Ответ: $x=29$.

4. $\frac{(2x-1)\cdot 2}{3}-\frac{3(6+x)}{4}=1\frac{1}{2} \quad |\cdot 12$; $4\cdot 2(2x-1)-3\cdot 3(6+x)=\frac{3}{2}\cdot 12$;

$16x-8-54-9x=18$;

$7x=18+62$; $7x=80$; $x=\frac{80}{7}$; $x=11\frac{3}{7}$.

Ответ: $x=11\frac{3}{7}$.

5. $\frac{3(3x+1)-4}{5}-\frac{2(2x+3)+6}{3}=4 \quad |\cdot 15$

$9(3x+1)-12-10(2x+3)-6\cdot 5=60$;

$27x+9-12-20x-30-30=60$; $7x=60+60+3$; $7x=123$;

$x=\frac{123}{7}$; $x=17\frac{4}{7}$.

Ответ: $x=17\frac{4}{7}$.

6. $\frac{(5x-1)\cdot 1{,}2-3{,}2}{3}-\frac{1{,}3\cdot(2+3x)-4{,}2}{4}=1 \quad |\cdot 12$

$4{,}8(5x-1)-12{,}8-3{,}9(2+3x)+12{,}6=12$;

$24x-4{,}8-0{,}2-7{,}8-11{,}7x=12$; $12{,}3x=12+12{,}8$;

$12{,}3x=24{,}8$; $x=\frac{24{,}8}{12{,}3}$; $x=\frac{248}{123}$; $x=2\frac{2}{123}$.

Ответ: $x=2\frac{2}{123}$

7. $2{,}3(4x+0{,}2)-1\frac{3}{7}(0{,}3-2x)=1$;

$2{,}3\cdot 4x+2{,}3\cdot 0{,}2-\frac{10}{7}\cdot\frac{3}{10}+\frac{10}{7}\cdot 2x=1$;

$9{,}2x+0{,}46-\frac{3}{7}+\frac{20}{7}x=1$; $9{,}2x+2\frac{6}{7}x=1-0{,}46+\frac{3}{7}$.

Переведем все дроби в обыкновенные.

$\left(9\frac{1}{5}+2\frac{6}{7}\right)x=1-\frac{46}{100}+\frac{3}{7}$; $11\frac{7+30}{35}x=\frac{54}{100}+\frac{3}{7}$;

$12\frac{2}{35}x=\frac{54\cdot 7+300}{100\cdot 7}$; $\frac{12\cdot 35+2}{35}x=\frac{378+300}{700}$;

$x=\frac{678}{700}\cdot\frac{35}{422}$; $x=\frac{339}{20\cdot 211}$; $x=\frac{339}{4220}$.

Ответ: $x=\frac{339}{4220}$.

8. $\frac{2{,}6\left(3x-3\frac{1}{2}\right)-2{,}1}{1{,}2}-\frac{2{,}7\left(2\frac{1}{4}-2{,}1x\right)-1}{0{,}7}=10$.

Здесь, чтобы облегчить вычисления, поступим так: умножим числитель и знаменатель каждой дроби на 10.

$\frac{10\left(2{,}6\left(3x-3\frac{1}{2}\right)-2{,}1\right)}{10\cdot 1{,}2}-\frac{10\left(2{,}7\left(2\frac{1}{4}-2{,}1x\right)-1\right)}{10\cdot 0{,}7}=10$;

$\frac{26(3x-3{,}5)-21}{12}-\frac{27(2{,}25-2{,}1x)-10}{7}=10$;

$$\frac{78x-91-21}{12}-\frac{50{,}75-56{,}7x}{7}=10\,;$$

$$\frac{39x-56}{6}-\frac{50{,}75-56{,}7x}{7}=10 \quad \Big|\cdot 42$$

$$7(39x-56)-6(50{,}75-56{,}7x)=420\,;$$

$$273x-392-304{,}5+340{,}2x=420\,; \quad 613{,}2x=1116{,}5\,;$$

$$x=\frac{11165}{6132}\,; \quad x=1\frac{719}{876}\,.$$

Ответ: $x=1\frac{719}{876}$.

Как видите, вычисления требуют точности, уверенности, аккуратности. И, главное, не паниковать из-за больших чисел, лучше еще раз проверить вычисления.

Линейные уравнения с одним неизвестным и приводящиеся к ним

Практикум 2

1. $\frac{3+2x}{x-1}=4$.

Очевидно, что такое уравнение определено не всегда. Действительно, при $x=1$ знаменатель обращается в нуль, а деление на ноль не определено (это принципиальная качественная неопределенность, связанная

с невозможностью сопоставить, например, дроби $\frac{5}{0}$ конкретное число)

Определение 7. ***Все значения*** *неизвестного, при которых уравнение определено, образуют область на числовой оси, называемую областью определения уравнения.*

Записывается это так: $D(У)$: любое $x \neq 1$,

иногда записывают в виде неравенств $x<1$ или $x>1$, или в виде интервалов $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, где $\cup$ – знак объединения.

На языке теории множеств можно сформулировать это так: множество всех значений неизвестного x, при которых уравнение определено, называется областью определения уравнения.

$D(У)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, где $\cup$ – знак объединения.

Итак, пусть $x \neq 1$, тогда дробно-рациональное

уравнение $\frac{3+2x}{x-1}=4$ преобразуется к $3+2x=4(x-1)$.

$3+2x=4x-4$; $\quad 4x-2x=3+4$;

$2x=7$; $\quad x=3{,}5$,

или $\{3{,}5\}$ (множество, состоящее из одного элемента).

Ответ: $\{3{,}5\}$.

2. $\frac{4x-2(3-x)}{3(x+2)}=1$. $D(У)$: $x+2\neq 0$; $x\neq -2$

$4x-2(3-x)=3(x+2)$;

$4x-6+2x=3x+6$;

$6x-3x=6+6$;

$3x=12$; $x=4$.

Очевидно $4\neq -2$, т.е. корень принадлежит области определения, записывают это так $4\in D(У)$.

Ответ: $x=4$.

3. $\frac{2(2x-1)+3(4-2x)}{3(x-2)-2(x+2)}=3$.

Выясним, при каких x уравнение определено. Для этого приравняем знаменатель к нулю и найдем значение x, при котором это верно.

$3(x-2)-2(x+2)=0$;

$3x-6-2x-4=0$; $x=10$,

значит $D(У)$: $x\neq 10$;

$2(2x-1)+3(4-2x)=3(3(x-2)-2(x+2))$;

$4x-2+12-6x=3(3x-6-2x-4)$;

$-2x+10=3(x-10)$;

$-2x+10=3x-30$;

$5x=40$;

$x=8$;

$x=8\in D(У)$.

Ответ: $x=8$.

4. $\frac{3(3x+1)-4(5x+1)}{2(2x-1)+5(0{,}2-3x)}=1$.

Прежде, чем решать уравнение и выяснять $D(У)$, преобразуем числитель и знаменатель.

$$\frac{9x+3-20x-4}{4x-2+1-15x}=1;$$

$$\frac{-11x-1}{-11x-1}=1; \qquad D(У):\quad -11x-1\neq 0, \quad \text{т.е. } x\neq -\frac{1}{11}.$$

Сокращая дробь, имеем $1=1$ – истина.

Значит любое значение x, принадлежащее области определения – есть решение.

Ответ: $x\neq -\frac{1}{11}$ или $\left(-\infty;-\frac{1}{11}\right)\cup\left(-\frac{1}{11};\infty\right)$.

5. $$\frac{4x-2(5+2x)}{0{,}3(2+0{,}4x)+1}=0.$$

После преобразования получим:

$$\frac{4x-10-4x}{0{,}6+0{,}12x+1}=0;$$

$$\frac{-10}{1{,}6+0{,}12x}=0.$$

Очевидно, что решения нет, так как $-10\neq 0$.

Ответ: $\varnothing$.

6. $$\frac{2x+3(4x-7)}{2(2x-3)-3(3-2x)}=2;$$

$$\frac{2x+12x-21}{4x-6-9+6x}=2;$$

$$\frac{14x-21}{10x-15}=2; \qquad D(У):\ 10x-15\neq 0; \quad x\neq 1{,}5.$$

тогда $14x-21=20x-30$;

$30-21=20x-14x$;

$9=6x$;

$x=1{,}5\notin D(У)$.

Ответ: $\varnothing$.

Тренировочная работа 2

Решите уравнения:

1. $\frac{5x-1}{9}-\frac{2x-1}{6}=2$.

2. $\frac{2(2x-1)-1}{4}-\frac{3-5(3x+1)}{6}=3$.

3. $-0,3(1-2x)+2,1(x-3)=0,6(x+4)+0,4(2-x)$.

4. $5x-(3x-(6x-2))=-10$.

5. $2(2x-1)-3(4-3x)=2-4(2x+3)$.

6. $0,4(3-2x)-0,3(2x-1)=3-2(3x+1)$.

7. $\frac{(2x-1)\cdot 0,3-5}{(4x+2)\cdot 0,6-0,7\left(7x-\frac{1}{7}\right)}=2$.

8. $\frac{4(x+1)-2(7+2x)}{0,3(2,4+0,4x)+1}=0$.

9. $\frac{3(3x+2)-4(5x-4)}{2(2x-3)-3\left(5x-9\frac{1}{3}\right)}=1$.

10. $\frac{2(x-2)+3(4x-15)}{2(2x-7)-3(7-2x)}=2$.

Решение тренировочной работы 2

Решите уравнения:

1. $\frac{5x-1}{9}-\frac{2x-1}{6}=2 \quad \Big|\cdot 18$

$2(5x-1)-3(2x-1)=2\cdot 18$;

$10x-2-6x+3=36$;

$4x+1=36$;

$4x=35$;

$x=\frac{35}{4}$; $\quad x=8\frac{3}{4}$

Ответ: $x=8\frac{3}{4}$.

2. $\frac{2(2x-1)-1}{4}-\frac{3-5(3x+1)}{6}=3 \quad \Big|\cdot 12$;

$3(2(2x-1)-1)-2(3-5(3x+1))=36$;

$6(2x-1)-3-6+10(3x+1)=36$;

$12x-6-9+30x+10=36$;

$42x=41$;

$x=\frac{41}{42}$.

Ответ: $x=\frac{41}{42}$.

3. $-0,3(1-2x)+2,1(x-3)=0,6(x+4)+0,4(2-x)$; $\quad \Big|\cdot 10$

$-3(1-2x)+21(x-3)=6(x+4)+4(2-x)$;

$-3+6x+21x-63=6x+24+8-4x$;

$21x+4x=32+66$;

$25x=98$;

$x=\frac{98}{25}$; $\quad x=3\frac{23}{25}$.

Ответ: $x=3\frac{23}{25}$.

4. $5x-(3x-(6x-2))=-10$;

$5x-3x+(6x-2)=-10$;

$2x+6x-2=-10$; $\quad 8x=-8$; $\quad x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

5. $2(2x-1)-3(4-3x)=2-4(2x+3)$.

$4x-2-12+9x=2-8x-12$;

$13x+8x=2+2$;

$21x=4$; $\quad x=\dfrac{4}{21}$.

Ответ: $x=\dfrac{4}{21}$.

6. $0{,}4(3-2x)-0{,}3(2x-1)=3-2(3x+1)$; $\quad |\cdot 10$

$4(3-2x)-3(2x-1)=30-20(3x+1)$;

$12-8x-6x+3=30-60x-20$;

$60x-14x=10-15$; $\quad 46x=-5$;

$x=-\dfrac{5}{46}$.

Ответ: $x=-\dfrac{5}{46}$.

7. $\dfrac{(2x-1)\cdot 0{,}3-5}{(4x+2)\cdot 0{,}6-0{,}7\left(7x-\dfrac{1}{7}\right)}=2$;

$\dfrac{0{,}6x-0{,}3-5}{2{,}4x+1{,}2-4{,}9x+0{,}1}=2$;

$\dfrac{0{,}6x-5{,}3}{1{,}3-2{,}5x}=2$; $\qquad D(У)$: $1{,}3-2{,}5x\neq 0$; $\quad x\neq\dfrac{13}{25}$.

$0{,}6x-5{,}3=2{,}6-5x$; $\quad 5x+0{,}6x=2{,}6+5{,}3$;

$5{,}6x=7{,}9$; $\quad x=\dfrac{79}{56}$; $\qquad x=1\dfrac{23}{56}\in D(У)$.

Ответ: $x=1\dfrac{23}{56}$.

8. $\dfrac{4(x+1)-2(7+2x)}{0{,}3(2{,}4+4x)+1}=0$;

$\dfrac{4x+4-14-4x}{0{,}72+1{,}2x+1}=0$; $\quad \dfrac{-10}{1{,}72+1{,}2x}=0$, но $-10\neq 0$.

Ответ: $\varnothing$ (решения нет).

9. $\dfrac{3(3x+2)-4(5x-4)}{2(2x-3)-3\left(5x-9\frac{1}{3}\right)}=1$.

$\dfrac{9x+6-20x+16}{4x-6+28-15x}=1$;

$\dfrac{-11x+22}{-11x+22}=1$; $\quad D(y)$: $-11x+22\neq 0$; $\quad x\neq\dfrac{22}{11}$; $\quad x\neq 2$.

После сокращения получим $1=1$ — истина.

Значит любое $x\in D(Y)$ — решение.

Ответ: $x\neq 2$, или $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.

10. $\dfrac{2(x-2)+3(4x-15)}{2(2x-7)-3(7-2x)}=2$.

$\dfrac{2x-4+12x-45}{2(2x-7)+3(2x-7)}=2$;

$\dfrac{14x-49}{5(2x-7)}=2$; $\quad D(Y)$: $2x-7\neq 0$; $\quad x\neq 3{,}5$;

$\dfrac{7(2x-7)}{5(2x-7)}=2$.

После сокращения: $\dfrac{7}{5}=2$ — ложь.

Ответ: $\varnothing$.

Проверочная работа 1

Решите уравнения:

1. $5(x+3)-4(3-2x)+3(4-5x)=2(4x-5)$.

2. $\frac{x+1}{4}-\frac{2x-3}{3}=5$.

3. $\frac{1-x}{4}-\frac{2(2x+1)}{5}=1\frac{1}{4}$.

4. $\frac{3(3x-2)}{4}-\frac{2(2x+1)}{3}=1\frac{1}{4}$.

5. $\frac{2(2x-1)-3}{3}-\frac{3-2x}{2}=5$.

6. $3,2(3x+0,3)-2\frac{2}{7}(0,2-3x)=-1$.

7. $\frac{4,2-0,3(5x+1)}{3}-\frac{3,2-1,2(2-3x)}{4}=1$.

8. $\frac{1,5-1,8(2x-1)}{0,6}-\frac{0,4-1,5(3+4x)}{1,8}=5$.

9. $3x-(4x-3(2x-1))=-14$.

10. $-0,5(2x+3)+0,1(x-3)=0,4(1-2x)-3$.

11. $\frac{(3x-1)0,4-3}{(5x+3)0,7-0,6\left(6x-\frac{1}{6}\right)}=3$.

12. $\frac{3x+1-2(4-3x)}{6(2x-1)-7(3x-2)-1}=-1$.

Уравнения, приводящиеся к линейным

Практикум 3

Уравнение по внешнему виду может выглядеть как уравнение, не являющееся линейным (т. е. степени выше первой), но после преобразований принимает стандартный вид линейного уравнения.

1. $(3x-1)(2x+3)-(4-x)(3-6x)=2$;

Воспользовавшись правилами перемножения многочлена на многочлен, получим:

$6x^2-2x+9x-3-\left(12-3x-24x+6x^2\right)=2$;

$6x^2+7x-3-6x^2+27x-12=2$;

$34x=17$; $\quad x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

2. $(6x-1)^2-4(3x+2)(3x-2)=-7$.

Разумеется, здесь важно знать основные формулы сокращенного умножения:

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

тогда

$36x^2-12x+1-4\left(9x^2-4\right)=-7$; $\quad 36x^2-12x+1-36x^2+16=-7$

$-12x=-24$; $\quad x=2$.

Ответ: $x=2$.

3. $4y^2-(2y+1)^2=12$;

$4y^2-\left(4y^2+4y+1\right)=12$; $\quad 4y^2-4y^2-4y-1=12$;

$-4y=13$; $\quad y=-\frac{13}{4}$; $\quad y=-3\frac{1}{4}$.

Ответ: $y=-3\frac{1}{4}$.

4. $(5x+6)^2(x-3)-(5x+1)^2(x-1)=28$;

$\left(25x^2+60x+36\right)(x-3)-\left(25x^2+10x+1\right)(x-1)=28$;

$25x^3+60x^2+36x-75x^2-180x-108-\left(25x^3+10x^2+x-25x^2-10x-1\right)=28$;

$25x^3-15x^2-144x-108-25x^3+15x^2+9x+1=28$;

$-135x=28+107$;

$-135x=135$; $\quad x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

5. $2(x-2)\left(x^2+2x+4\right)-3\left(x^3+2x-1\right)=-x^3+3$.

Напомним, что $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

$2\left(x^3-8\right)-3x^3-6x+3=-x^3+3$;

$2x^3-16-3x^3-6x+3=-x^3+3$;

$-6x-13=3$; $\qquad -6x=16$;

$x=-\frac{16}{6}$; $\quad x=-\frac{8}{3}$.

Ответ: $x=-2\frac{2}{3}$.

6. $9x^3-3\left(x^2+2\frac{2}{3}x-1\frac{1}{3}\right)-9(x-1)^3=(3x+1)(8x-3)$.

Напомним, что $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

$9x^3-3x^2-3\cdot\frac{8}{3}x+3\cdot\frac{4}{3}-9\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=24x^2+8x-9x-3$;

$9x^3-3x^2-8x+4-9x^3+27x^2-27x+9=24x^2-x-3$;

$-35x+x=-3-13$;

$-34x=-16$;

$x=\frac{16}{34}$;

$x=\frac{8}{17}$.

Ответ: $x=\frac{8}{17}$.

7. $(x+3)^3-(x+1)(x-2)(x+3)=7(x+1)(x-1)$.

Напомним, что $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$x^3+3x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3-(x+1)\left(x^2-2x+3x-6\right)=7\left(x^2-1\right)$;

$x^3+9x^2+27x+27-(x+1)\left(x^2+x-6\right)=7\left(x^2-1\right)$;

$x^3+9x^2+27x+27-\left(x^3+x^2-6x+x^2+x-6\right)=7\left(x^2-1\right)$;

$x^3+9x^2+27x+27-x^3-2x^2+5x+6=7x^2-7$;

$32x=-7-33$; $\quad 32x=-40$; $\quad x=-\dfrac{40}{32}$; $\quad x=-\dfrac{5}{4}$.

Ответ: $x=-1{,}25$.

8. $3(4x-3)(x+2)(1-2x)-4(3x-4)(2-x)(2x+1)=$
$=43(2x-3)(2-x)$.

$3(4x-3)\left(x+2-2x^2-4x\right)-4(3x-4)\left(4x-2x^2+2-x\right)=$
$=43\left(4x-6-2x^2+3x\right)$;

$3(4x-3)\left(-2x^2-3x+2\right)-4(3x-4)\left(-2x^2+3x+2\right)=43\left(-2x^2+7x-6\right)$;

$3\left(-8x^3-12x^2+8x+6x^2+9x-6\right)-4(3x-4)\left(-2x^2+3x+2\right)=$
$=-86x^2+301x-258$;

$3\left(-8x^3-6x^2+17x-6\right)-4\left(-6x^3+9x^2+6x+8x^2-12x-8\right)=$
$=-86x^2+301x-258$;

$-24x^3-18x^2+51x-18+24x^3-68x^2+24x+32=$
$=-86x^2+301x-258$;

$75x+14=301x-258$;

$301x-75x=258+14$; $\quad 226x=272$;

$x=\dfrac{272}{226}$; $\quad x=1\dfrac{46}{226}$.

Ответ: $x=1\dfrac{23}{113}$.

Тренировочная работа 3

Решите уравнения:

1. $0,5(3x-4)-3x=2+0,4(2-x)+1,9x$.

2. $0,03x+0,07:\left(1\frac{7}{24}+\frac{7}{30}-2\frac{9}{40}\right)=0$.

3. $\left(\frac{29}{30}+1\frac{11}{12}-2\frac{31}{35}\right)x+\frac{3}{42}=0$.

4. $(4-3x)(3x+2)-2(3-x)(4+x)+7x^2=3$.

5. $2x^2-(2x-5)(x-1)=9$.

6. $9x^2-(3x-1)^2=6$.

7. $(13y-2)^2-(12y-5)^2-(5y+4)^2=19$.

8. $(6x-1)^2(x-2)-(6x-5)^2(x+1)=33-60x^2$.

9. $(y+5)(y^2-5y+25)-y(y^2-4)=25$.

10. $4(3x+4)(x+2)(1-2x)-3(4x+3)(2-x)(1+2x)=$
$=-43(2x+3)(x+2)-12$.

11. $\frac{(3x-1)^2+(4x+3)^2}{(5x+2)^2-4}=1$.

12. $\frac{(2x-1)(3x+2)-2(x-2)^2}{2(x+2)(x-2)-10}=2$.

Решение тренировочной работы 3

Решите уравнения:

1. $0,5(3x-4)-3x=2+0,4(2-x)+1,9x;\quad \Big|\cdot 10$

$5(3x-4)-30x=20+4(2-x)+19x;$

$15x-20-30x=20+8-4x+19x;$

$-30x=28+20;\quad x=-\dfrac{48}{30};\quad x=-\dfrac{8}{5};\quad x=-1,6.$

Ответ: $x=-1,6$.

2. $0,03x+0,07:\left(1\dfrac{7^{\lfloor 5}}{24}+\dfrac{7^{\lfloor 4}}{30}-2\dfrac{9^{\lfloor 3}}{40}\right)=0;\qquad \Big|\cdot 100$

$3x+7:\left(1\dfrac{35+28}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-2\dfrac{27}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5}\right)=0;$

$3x+\dfrac{7}{-\left(2\dfrac{27}{120}-1\dfrac{63}{120}\right)}=0$

$3x+\dfrac{7}{-\left(\dfrac{147-63}{120}\right)}=0;$

$3x-\dfrac{7\cdot 120}{84}=0;\quad 3x=\dfrac{7\cdot 3\cdot 4\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 7};\quad 3x=10;\quad x=\dfrac{10}{3};\quad x=3\dfrac{1}{3}.$

$24=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$
$30=2\cdot 3\cdot 5$
$40=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$
наименьший общий знаменатель равен $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$

Ответ: $x=3\dfrac{1}{3}$.

3. $\left(\dfrac{29}{30}+1\dfrac{11}{12}-2\dfrac{31}{35}\right)x+\dfrac{3}{42}=0;$

$\left(1\dfrac{14\cdot 29+35\cdot 11}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}-2\dfrac{31\cdot 12}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right)\cdot x=-\dfrac{3}{42}$

$-\left(2\dfrac{372}{420}-1\dfrac{791}{420}\right)x=-\dfrac{3}{42};$

$\dfrac{1}{420}x=\dfrac{3}{42};\quad x=\dfrac{420\cdot 3}{42};\quad x=10\cdot 3;\quad x=30.$

$30=2\cdot 3\cdot 5$
$12=2\cdot 2\cdot 3$
$35=5\cdot 7$
наименьший общий знаменатель равен $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

Ответ: $x=30$.

4. $(4-3x)(3x+2)-2(3-x)(4+x)+7x^2=3$;

$12x-9x^2+8-6x-2(3-x)(4+x)+7x^2=3$;

$-9x^2+6x+8+2x^2+2x-24+7x^2=3$;

$8x=19$; $x=\frac{19}{8}$; $x=2\frac{3}{8}$.

Ответ: $x=2\frac{3}{8}$.

5. $2x^2-(2x-5)(x-1)=9$;

$2x^2-2x^2+7x-5=9$; $7x=14$; $x=2$.

Ответ: $x=2$.

6. $9x^2-(3x-1)^2=6$;

$9x^2-(9x^2-6x+1)=6$; $9x^2-9x^2+6x-1=6$;

$6x=7$; $x=\frac{7}{6}$; $x=1\frac{1}{6}$.

Ответ: $x=1\frac{1}{6}$.

7. $(13y-2)^2-(12y-5)^2-(5y+4)^2=19$;

$(169y^2-52y+4)-(144y^2-120y+25)-(25y^2+40y+16)=19$;

$169y^2-52y+4-144y^2+120y-25-25y^2-40y-16=19$;

$28y=19+37$; $28y=56$; $y=2$.

Ответ: $y=2$.

8. $(6x-1)^2(x-2)-(6x-5)^2(x+1)=33-60x^2$;

$(36x^2-12x+1)(x-2)-(36x^2-60x+25)(x+1)=33-60x^2$;

$(36x^3-12x^2+x-72x^2+24x-2)-(36x^3-60x^2+25x+36x^2-60x+25)=33-60x^2$;

$36x^3-84x^2+25x-2-36x^3+24x^2+35x-25=33-60x^2$;

$-60x^2+60x-60+60x^2=0$; $60x-60=0$; $x=1$.

Ответ: $x=1$.

9. $(y+5)(y^2-5y+25)-y(y^2-4)=25$;

$y^3+125-y^3+4y=25$;

$4y=-100$;

$y=-25$.

Ответ: $y=-25$.

10. $4(3x+4)(x+2)(1-2x)-3(4x+3)(2-x)(1+2x)=$
$=-43(2x+3)(x+2)-12.$

а) $(3x+4)(x+2)(1-2x)=(3x+4)(x+2-2x^2-4x)=$
$=(3x+4)(-2x^2-3x+2)=$
$=-6x^3-8x^2-9x^2-12x+6x+8=-6x^3-17x^2-6x+8$;

б) $(4x+3)(2-x)(1+2x)=(4x+3)(2-x+4x-2x^2)=$
$=(4x+3)(-2x^2+3x+2)=-8x^3-6x^2+12x^2+9x+8x+6=$
$=-8x^3+6x^2+17x+6$;

в) $(2x+3)(x+2)=2x^2+3x+4x+6=2x^2+7x+6$.

Тогда уравнение примет вид

$4(-6x^3-17x^2-6x+8)-3(-8x^3+6x^2+17x+6)=$
$=-43(2x^2+7x+6)-12$;

$-24x^3-68x^2-24x+32+24x^3-18x^2-51x-18=$
$=-86x^2-301x-258-12$;

$301x-75x=-270-14$; $226x=-284$;

$x=-\frac{284}{226}$; $x=-\frac{142}{113}$.

Ответ: $x=-1\frac{29}{113}$.

11. $\dfrac{(3x-1)^2+(4x+3)^2}{(5x+2)^2-4}=1;$ $\qquad D(У)$: $(5x+2)^2-4\neq 0;$

$\dfrac{9x^2-6x+1+16x^2+24x+9}{25x^2+20x+4-4}=1;$

$\dfrac{25x^2+18x+10}{25x^2+20x}=1;$

$25x^2+18x+10=25x^2+20x;\quad 2x=10;\quad x=5.$

Проверим принадлежность $5\in D(У)$ – ?

Обозначим $y(x)=(5x+2)^2-4$, вычислим

$y(5)=(5\cdot 5+2)^2-4=27^2-4\neq 0$. Значит $5\in D(У)$.

Ответ: $x=5$.

12. $\dfrac{(2x-1)(3x+2)-2(x-2)^2}{2(x+2)(x-2)-10}=2.$ $\qquad D(У)$: $\qquad 2(x+2)(x-2)-10\neq 0.$

$\dfrac{6x^2+x-2-2x^2+8x-8}{2x^2-8-10}=2,$ $\qquad$ значит $\qquad D(У)$: $x^2-9\neq 0;$

$\dfrac{4x^2+9x-10}{2x^2-18}=2;$

$4x^2+9x-10=4x^2-36;$

$9x=-26;$

$x=-\dfrac{26}{9}.$

Пусть $y(x)=x^2-9$.

$y\left(-\dfrac{26}{9}\right)=\left(-\dfrac{26}{9}\right)^2-9=\dfrac{676}{81}-9\neq 0,$

т. е. $x=-\dfrac{26}{9}\in D(У)$.

Ответ: $x=-2\dfrac{8}{9}$.

Проверочная работа 2

Решите уравнения:

1. $4(2x-3)-3(2x+1)+2(3x+1)=-1$.

2. $\dfrac{2(x+2)-3(x-1)}{3(x+1)-4(x-1)}=1$.

3. $\dfrac{1{,}4(x-1)+1{,}2(3-x)}{2{,}1(x+2)-0{,}7(x-3)}=2$.

4. $(2x-3)(5x+1)-5x(2x+3)+16x=3$.

5. $4x^2-(x-2)(4x+3)=16$.

6. $\dfrac{(4x-1)(x+2)-(2x+1)(2x-1)-4(x-1)}{2x^2-(2x+1)(x-2)}=1$.

7. $(12x-5)^2-(8x+1)^2-(7-10x)(3-8x)=78$.

8. $\dfrac{(13x-1)^2-(12x+3)^2}{(4x+5)^2-41(x-1)(x+1)}=-1$.

9. $(5x-1)^2(x+1)-(6-5x)^2(x+3)=28$.

10. $(x-1)(x+2)(3-2x)-2(x+1)(x-2)(3-x)=(7x-1)(1-x)$.

Практикум 4

Рассмотрим уравнения:

1. $\frac{3}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{28}{1-x^2}$.

Внешне оно выглядит как явно нелинейное, но после преобразования уравнение приводится к уравнению первой степени.

Для решения уравнения необходимо перенести все дроби в одну сторону, найти общий знаменатель и т. д.

$$\frac{3^{\lfloor 1+x}}{1-x}+\frac{1^{\lfloor 1-x}}{1+x}-\frac{28}{(1-x)(1+x)}=0;\quad \frac{3(1+x)+1-x-28}{(1-x)(1+x)}=0;\quad \frac{2x-24}{(1-x)(1+x)}=0.$$

Напомним, что дробь равна нулю, только если числитель равен нулю, а знаменатель нет.

т. е. $\begin{cases}2x-24=0\\(1-x)(1+x)\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x=12\\(1-12)(1+12)\neq 0 - \text{истина}\end{cases}$; $x=12$.

Можно чуть иначе: $D(y)$: $(1-x)(1+x)\neq 0;\ \Rightarrow \begin{cases}x\neq 1\\x\neq -1\end{cases}$.

Ответ: $x=12$.

2. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}-1=\frac{3}{(x+1)(x-2)}$.

$$\frac{x+2^{\lfloor x-2}}{x+1}+\frac{3^{\lfloor x+1}}{x-2}-1^{\lfloor (x-2)(x+1)}=\frac{3}{(x+1)(x-2)};$$

$$\frac{(x-2)(x+2)+3(x+1)-(x-2)(x+1)-3}{(x+1)(x-2)}=0;\quad \frac{x^2-4+3x+3-x^2+x+2-3}{(x+1)(x-2)}=0;$$

$$\frac{4x-2}{(x+1)(x-2)}=0;\quad \begin{cases}4x-2=0\\(x+1)(x-2)\neq 0\end{cases};\quad \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\neq 0 - \text{истина}.\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

3. $\frac{y}{y^2-9}-\frac{1}{y^2+3y}+\frac{1-2y}{6y+2y^2}=0$;

$$\frac{y^{|2y}}{(y+3)(y-3)}-\frac{1^{|2(y-3)}}{y(y+3)}+\frac{1-2y^{|y-3}}{2y(3+y)}=0;\quad \frac{2y^2-2(y-3)+(1-2y)(y-3)}{2y(y+3)(y-3)}=0;$$

$$\frac{2y^2-2y+6+y-2y^2-3+6y}{2y(y+3)(y-3)}=0;\quad \frac{5y+3}{2y(y+3)(y-3)}=0;$$

$$\begin{cases}5y+3=0\\ 2y(y+3)(y-3)\neq 0\end{cases};\quad \begin{cases}y=-0,6\\ 2(-0,6)(-0,6+3)(-0,6-3)\neq 0 - \text{истина}.\end{cases}$$

Ответ: $y=-0,6$.

4. $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1-x}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$;

$$\frac{1-(2-x)}{2-x}=\frac{1-x}{x-2}-\frac{6-x}{3(x+2)(x-2)};\quad \frac{1-2+x}{2-x}-\frac{1-x}{x-2}+\frac{6-x}{3(x+2)(x-2)}=0;$$

$$-\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{6-x}{3(x+2)(x-2)}=0;\quad \frac{6-x}{3(x+2)(x-2)}=0;$$

$$\begin{cases}6-x=0\\ 3(x+2)(x-2)\neq 0\end{cases};\quad \begin{cases}x=6\\ 3(6+2)(6-2)\neq 0 - \text{истина}.\end{cases}$$

$x=6$.

Ответ: $x=6$.

5. $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$;

$$\frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)}=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)};\quad \frac{2}{(x+2)(x+4)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)};$$

$$\begin{cases}(x+2)(x+4)=(x+1)(x+3)\\ (x+2)(x+4)\neq 0\\ (x+1)(x+3)\neq 0\end{cases};\begin{cases}x^2+6x+8=x^2+4x+3\\ x+2\neq 0\\ x+4\neq 0\\ x+1\neq 0\\ x+3\neq 0\end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x=-5 \\ x\neq -2 \\ x\neq -4 \\ x\neq -1 \\ x\neq -3 \end{cases};\quad x=-2{,}5\,.$$

Ответ: $x=-2{,}5$.

6. $\dfrac{1}{5-\frac{1}{x}}=\dfrac{2}{7}$. $\qquad D(У)$: $5-\dfrac{1}{x}\neq 0$;

$\dfrac{1}{\frac{5x-1}{x}}=\dfrac{2}{7}$; $\quad \dfrac{x}{5x-1}=\dfrac{2}{7}$; $\quad 7x=2(5x-1)$; $\quad 7x=10x-2$;

$3x=2$; $\quad x=\dfrac{2}{3}$.

Проверим $\dfrac{2}{3}\in D(У)$ или нет:

$5-\dfrac{1}{\frac{2}{3}}\neq 0$; $\quad 5-\dfrac{3}{2}\neq 0$; $\quad 3{,}5\neq 0$ – истина.

Ответ: $x=\dfrac{2}{3}$.

7. $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}=\left(\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}\right):\dfrac{1+x^3}{x^2-x}$;

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}=\left(\frac{x^{\lfloor x}}{(x+1)(x-1)}-\frac{1^{\lfloor x-1}}{x(x+1)}\right)\cdot\frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)};$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2-x+1}{x(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x(x-1)}{(1+x)(x^2-x+1)};$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{x}\,\cancel{(x^2-x+1)}\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}(x+1)^2\,\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x^2-x+1)}}\qquad (x\neq 0;\ x\neq 1);$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2};\quad \frac{x^2-1}{(x+1)^2}=0;$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}=0\ ;\quad \begin{cases} x-1=0 \\ x+1\neq 0 \end{cases};\quad x=1\,.$$

При проверке, если $x=1$, один из знаменателей равен нулю. Значит решения нет.

Ответ: $\varnothing$.

8. $$\left(\frac{6x-1}{x^2+6x}+\frac{6x+1}{x^2-6x}\right):\frac{x^2+1}{x^2-36}-\frac{12}{x-1}=\frac{12}{x-x^2}\,.$$

$$\left(\frac{6x-1^{\underline{|x-6}}}{x(x+6)}+\frac{6x+1^{\underline{|x+6}}}{x(x-6)}\right)\cdot\frac{x^2-36}{x^2+1}-\frac{12}{x-1}-\frac{12}{x-x^2}=0\ ;$$

$$\frac{(x-6)(6x-1)+(x+6)(6x+1)}{x(x+6)(x-6)}\cdot\frac{(x+6)(x-6)}{x^2+1}-\frac{12}{x-1}-\frac{12}{x(1-x)}=0\ ;$$

$$\frac{\left(6x^2-36x-x+6+6x^2+36x+x+6\right)(x+6)(x-6)}{x(x+6)(x-6)\left(x^2+1\right)}-\frac{12^{\underline{|x}}}{x-1}+\frac{12}{x(x-1)}=0\ ;$$

$$\frac{12\cancel{\left(x^2+1\right)}\,\cancel{(x+6)}\,\cancel{(x-6)}}{x\,\cancel{(x+6)}\,\cancel{(x-6)}\,\cancel{\left(x^2+1\right)}}-\frac{12x-12}{x(x-1)}=0\ ;\quad \frac{12}{x}-\frac{12(x-1)}{x(x-1)}=0\ ;\quad \frac{12}{x}-\frac{12}{x}=0\ ;$$

$0=0$.

Значит $\forall x\in D(У)$ – есть решение. Остается выяснить $D(У)$, это условие того, что знаменатели не равены нулю и делитель не равен нулю.

$$D(У):\ \begin{cases} x^2+6x\neq 0 \\ x^2-6x\neq 0 \\ x^2-36\neq 0 \\ x-1\neq 0 \\ x(x-1)\neq 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x\neq 0 \\ x+6\neq 0 \\ x-6\neq 0 \\ x\neq 1 \end{cases};\quad \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 6 \\ x\neq -6 \\ x\neq 1 \end{cases}.$$

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;6)\cup(6;\infty)$.

Тренировочная работа 4

Решите уравнения:

1. $(2x-3)(5x-1)-5x(2x-3)+16x=0$.

2. $(3-2x)(2x+3)-(4-2x)(5+2x)=4$.

3. $(x+4)(x^2-4x+16)-x(x^2-9)=18$.

4. $(6x+1)^2(1-x)+(5-6x)^2(x+1)=14$.

5. $4(4-3x)(2-x)(1+2x)-3(3-4x)(2+x)(1-2x)=$
$=-43(2x+5)(x+2)-18.$

6. $\frac{24}{x}-\frac{17-x}{x-1}=1$.

7. $\frac{4}{x-3}+\frac{3}{x+3}=\frac{12}{2x^2-18}$.

8. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{3}{x-1}-1=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$.

9. $\frac{2x-1}{14x^2-7x}+\frac{8}{12x^2-3}=\frac{6x}{7(6x^2-3x)}$.

10. $\frac{1}{3-x}-1=\frac{2-x}{x-3}-\frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}$.

11. $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$.

12. $\frac{y}{y^2-2y+1}=\frac{y^2-y}{y^3-1}\left(\frac{1}{y^2-y}+\frac{y}{y^2-1}\right)$.

Решение тренировочной работы 4

Решите уравнения:

1. $(2x-3)(5x-1)-5x(2x-3)+16x=0$.

$10x^2-15x-2x+3-10x^2+15x+16x=0$;

$14x+3=0$;

$x=-\frac{3}{14}$.

Ответ: $x=-\frac{3}{14}$.

2. $(3-2x)(2x+3)-(4-2x)(5+2x)=4$.

$9-4x^2-\left(20-10x+8x-4x^2\right)=4$;

$9-4x^2+4x^2+2x-20=4$;

$2x=15$; $x=7{,}5$.

Ответ: $x=7{,}5$.

3. $(x+4)\left(x^2-4x+16\right)-x\left(x^2-9\right)=18$.

$x^3+64-x^3+9x=18$;

$9x=-46$;

$x=-\frac{46}{9}$; $x=-5\frac{1}{9}$.

Ответ: $x=-5\frac{1}{9}$.

4. $(6x+1)^2(1-x)+(5-6x)^2(x+1)=14$.

$\left(36x^2+12x+1\right)(1-x)+\left(25-60x+36x^2\right)(x+1)=14$;

$36x^2+12x+1-36x^3-12x^2-x+25x-60x^2+36x^3+25-60x+36x^2=14$;

$-24x+26=14$; $-24x=-12$;

$x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

5. $4(4-3x)(2-x)(1+2x)-3(3-4x)(2+x)(1-2x)=$
$=-43(2x+5)(x+2)-18.$

а) $(4-3x)(2-x)(1+2x)=(4-3x)\left(2-x+4x-2x^2\right)=$

$=(4-3x)\left(-2x^2+3x+2\right)=$

$=-8x^2+6x^3+12x-9x^2+8-6x=6x^3-17x^2+6x+8;$

б) $(3-4x)(2+x)(1-2x)=(3-4x)\left(2+x-4x-2x^2\right)=$

$=(3-4x)\left(-2x^2-3x+2\right)=$

$=-6x^2+8x^3-9x+12x^2+6-8x=8x^3+6x^2-17x+6;$

в) $(2x+5)(x+2)=2x^2+5x+4x+10=2x^2+9x+10.$

Тогда уравнение примет вид:

$4\left(6x^3-17x^2+6x+8\right)-3\left(8x^3+6x^2-17x+6\right)=$

$=-43\left(2x^2+9x+10\right)-18;$

$24x^3-68x^2+24x+32-24x^3-18x^2+51x-18=$

$=-86x^2-387x-430-18;$

$75x+14=-387x-448;$

$462x=-462;$

$x=-1.$

Ответ: $x=-1.$

6. $\frac{24}{x}-\frac{17-x}{x-1}=1$ $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{cases};$

$\frac{24(x-1)-x(17-x)}{x(x-1)}=1;$

$24x-24-17x+x^2=x(x-1);$

$x^2+7x-24=x^2-x;$

$8x-24=0;$

$x=3\in D(У).$

Ответ: $x=3.$

7. $\frac{4}{x-3}+\frac{3}{x+3}=\frac{12}{2x^2-18}$.

$\frac{4(x+3)+3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{12}{2(x^2-9)}$; $\frac{4x+12+3x-9}{(x-3)(x+3)}-\frac{12}{2(x+3)(x-3)}=0$;

$\frac{7x+3}{(x-3)(x+3)}-\frac{6}{(x+3)(x-3)}=0$; $\frac{7x+3-6}{(x+3)(x-3)}=0$; $\frac{7x-3}{(x+3)(x-3)}=0$;

$$\begin{cases} 7x-3=0 \\ (x+3)(x-3)\neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{7} \\ \left(\frac{3}{7}+3\right)\left(\frac{3}{7}-3\right)\neq 0 \text{ – истина} \end{cases}.$$

Ответ: $x=\frac{3}{7}$.

8. $\frac{x+3^{\underline{|x-1}}}{x+2}+\frac{3^{\underline{|x+2}}}{x-1}-1^{\underline{|(x+2)(x-1)}}=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$.

$\frac{(x-1)(x+3)+3(x+2)-(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$;

$\frac{x^2-x+3x-3+3x+6-x^2-2x+x+2}{(x+2)(x-1)}=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$;

$\frac{4x+5}{(x+2)(x-1)}-\frac{3}{(x+2)(x-1)}=0$; $\frac{4x+5-3}{(x+2)(x-1)}=0$; $\frac{4x+2}{(x+2)(x-1)}=0$;

$$\begin{cases} 4x+2=0 \\ (x+2)(x-1)\neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ (x+2)(x-1)\neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ \left(-\frac{1}{2}+2\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\neq 0 \text{ – истина.} \end{cases}$$

$x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

9. $\dfrac{2x-1}{14x^2-7x}+\dfrac{8}{12x^2-3}=\dfrac{6x}{7\left(6x^2-3x\right)}$.

$$\frac{2x-1^{|3(2x+1)}}{7x(2x-1)}+\frac{8^{|7x}}{3\left(4x^2-1\right)}-\frac{6x^{|2x+1}}{21x(2x-1)}=0;$$

$$\frac{3(2x+1)(2x-1)+56x-6x(2x+1)}{21x(2x+1)(2x-1)}=0; \quad \frac{3\left(4x^2-1\right)+56x-12x^2-6x}{21x(2x+1)(2x-1)}=0;$$

$$\frac{12x^2-3+56x-12x^2-6x}{21x(2x+1)(2x-1)}=0; \quad \frac{50x-3}{21x(2x+1)(2x-1)}=0;$$

$$\begin{cases}50x=3\\ 21x(2x+1)(2x-1)\neq 0\end{cases}; \quad \begin{cases}x=\dfrac{3}{50}\\ 21x(2x+1)(2x-1)\neq 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}x=0{,}06\\ 21\cdot 0{,}06(0{,}12+1)(0{,}12-1)\neq 0 \text{ – истина.}\end{cases}$$

$x=0{,}06$.

Ответ: $x=0{,}06$.

10. $\dfrac{1}{3-x}-1=\dfrac{2-x}{x-3}-\dfrac{7-x}{3(x-3)(x+1)}$.

$$\frac{-1}{x-3}-1-\frac{2-x}{x-3}+\frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}=0;$$

$$\frac{-1-2+x}{x-3}-1+\frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}=0; \quad \frac{x-3}{x-3}-1+\frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}=0;$$

$$1-1+\frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}=0; \quad \frac{7-x}{3(x-3)(x+1)}=0;$$

$$\begin{cases}x=7\\ 3(x+1)(x-3)\neq 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}x=7\\ 3(7+1)(7-3)\neq 0 \text{ – истина.}\end{cases}$$

$x=7$.

Ответ: $x=7$.

11. $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}$. $D(У)$: $\begin{cases} x+3\neq 0 \\ x+5\neq 0 \\ x+2\neq 0 \\ x+4\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq -5 \\ x\neq -2 \\ x\neq -4 \end{cases}$;

$$\frac{x+5-(x+3)}{(x+3)(x+5)}=\frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)};$$

$$\frac{2}{(x+3)(x+5)}=\frac{2}{(x+2)(x+4)};$$

$$(x+3)(x+5)=(x+2)(x+4);$$

$$x^2+8x+15=x^2+6x+8;$$

$$x=-3{,}5\in D(У).$$

О т в е т: $x=-3{,}5$.

12. $\dfrac{y}{y^2-2y+1}=\dfrac{y^2-y}{y^3-1}\left(\dfrac{1}{y^2-y}+\dfrac{y}{y^2-1}\right)$

$$\frac{y}{(y-1)^2}-\frac{y}{y^2+y+1}\cdot\left(\frac{1^{\lfloor y+1}}{y(y-1)}+\frac{y^{\lfloor y}}{(y+1)(y-1)}\right)=0;$$

$$\frac{y}{(y-1)^2}-\frac{y}{y^2+y+1}\cdot\frac{y+1+y^2}{y(y+1)(y-1)}=0;$$

$$\frac{y}{(y-1)^2}-\frac{\cancel{y}\,\cancel{(y^2+y+1)}}{\cancel{(y^2+y+1)}\,\cancel{y}(y+1)(y-1)}=0;$$

$$\frac{y^{\lfloor y+1}}{(y-1)^2}-\frac{1^{\lfloor y-1}}{(y+1)(y-1)}=0; \quad \frac{y(y+1)-(y-1)}{(y-1)^2(y+1)}=0;$$

$$\frac{y^2+y-y+1}{(y-1)^2(y+1)}=0; \quad \frac{y^2+1}{(y-1)^2(y+1)}=0;$$

$$y^2+1=0.$$

Решения нет.

О т в е т: $y\in\varnothing$.

Проверочная работа 3

Решите уравнения:

1. $2x+1+\dfrac{2x-1}{6}=\dfrac{7x-13}{4}$.

2. $\dfrac{3(2x-2{,}5)}{5}-2x+2{,}5=\dfrac{2-x}{2}$.

3. $\dfrac{(2x-1)^2}{8}-\dfrac{x(2x-3)}{4}=\dfrac{1+0{,}25x}{12}$.

4. $\dfrac{\left(x+1\frac{1}{3}\right)^2}{4}+\dfrac{1{,}5x(1-x)}{9}=\dfrac{(x-4)(x+4)}{12}$.

5. $(3x+2)(3x-2)-(3x-4)^2=28$.

6. $(2x-1)\left(1+2x+4x^2\right)-4x\left(2x^2-3\right)=23$.

7. $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{4x}{x+5}-3$.

8. $\dfrac{1{,}5x^2}{9x^2-1}-\dfrac{3x+1}{3-9x}-\dfrac{3x-1}{6x+2}=0$.

9. $x-2+\dfrac{4}{2+x}-\dfrac{x^3+6}{x^2+2x}=0$.

10. $\dfrac{x+3}{(2x+3)(2x-3)}-\dfrac{3-x}{(2x+3)^2}=\dfrac{1}{2x-3}$.

11. $\dfrac{7-18x}{x^3+1}+\dfrac{15}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{1-x^2}$.

12. $\dfrac{2x-1}{2x+2}\left(\dfrac{2x}{1-4x+4x^2}-\dfrac{4x^2+2x}{8x^3-1}\right)=\dfrac{2x}{8x^3-1}$.

2

Квадратные уравнения

Определение 8. *Уравнение вида* $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ *называется* ***квадратным.***

Известны следующие формулы решения.

$\boxed{\text{A}}$ Приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ решается по формуле: $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

$\boxed{\text{B}}$ Квадратное уравнение общего вида: $ax^2+bx+c=0$ решается по формуле: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$\boxed{\text{C}}$ Квадратное уравнение с четным коэффициентом при неизвестном первой степени $ax^2+2kx+c=0$ решается по формуле: $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$.

Примечание. Любые квадратные уравнения можно решать по общей формуле, но иногда рациональнее использовать алгоритмы формул А или С.

Практикум 5

1. $x^2+4x-12=0$.

Используем формулу А.

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{(-2)^2-(-12)}=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm 4$$

где $\left|\begin{array}{l} p=4 \\ q=-12 \end{array}\right.$,

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \end{array}\right.$, или $x_1=2$; $x_2=-6$.

Ответ: $x_1=2$; $x_2=-6$, или $\{2;-6\}$ (множество, содержащее два элемента).

2. $3x^2-5x+2=0$.

Используем формулу В.

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm 1}{6}, \quad \text{где} \left|\begin{array}{l} a=3 \\ b=-5; \\ c=2 \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$ или $x_1=1$; $x_2=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{1;\ \frac{2}{3}\right\}$.

3. $5x^2+8x+3=0$.

Используем формулу С.

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-5\cdot 3}}{5}=\frac{-4\pm 1}{5}, \quad \text{где} \left|\begin{array}{l} a=5 \\ k=4; \\ c=3 \end{array}\right.$$

$x_1=-\frac{3}{5}$; $x_2=-1$.

Ответ: $\left\{-1;-\frac{3}{5}\right\}$.

Тренировочные карточки заданий на решение простейших квадратных уравнений (с ответами)

Карточка 1

1. $2x^2 - x - 1 = 0$. $\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$

2. $5x^2 + x - 4 = 0$. $\left\{-1;\frac{4}{5}\right\}$

3. $20x^2 + x - 1 = 0$. $\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right\}$

4. $8x^2 + 10x + 3 = 0$. $\left\{-\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right\}$

5. $-6x^2 + 7x - 2 = 0$. $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$

6. $4x^2 + 7x - 2 = 0$. $\left\{-2;\frac{1}{4}\right\}$

7. $7x^2 + 11x + 4 = 0$. $\left\{-1;-\frac{4}{7}\right\}$

8. $-5x^2 + 8x - 3 = 0$. $\left\{1;\frac{3}{5}\right\}$

9. $2x^2 + 9x - 5 = 0$. $\left\{-5;\frac{1}{2}\right\}$

10. $8x^2 + 2x - 1 = 0$. $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\}$

Карточка 2

1. $4x^2 + x - 5 = 0$. $\left\{1;-\frac{5}{4}\right\}$

2. $12x^2 - 13x + 1 = 0$. $\left\{1;\frac{1}{12}\right\}$

3. $5 + 4x - x^2 = 0$. $\{5;-1\}$

4. $5x^2 + 2x - 3 = 0$. $\left\{-1;\frac{3}{5}\right\}$

5. $8x^2 - 10x + 3 = 0$. $\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right\}$

6. $-2x^2 + 7x - 6 = 0$. $\left\{2;1\frac{1}{2}\right\}$

7. $24x^2 + 5x - 1 = 0$. $\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{8}\right\}$

8. $4x^2 + x - 3 = 0$. $\left\{-1;\frac{3}{4}\right\}$

9. $-3x^2 + 8x - 5 = 0$. $\left\{1;\frac{5}{3}\right\}$

10. $5x^2 - 11x + 2 = 0$. $\left\{2;\frac{1}{5}\right\}$

Карточка 3

1. $-8x^2+6x+9=0$. $\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right\}$

2. $28x^2+13x-6=0$. $\left\{\frac{2}{7};-\frac{3}{4}\right\}$

3. $12x^2+23x+5=0$. $\left\{-\frac{1}{4};-\frac{5}{3}\right\}$

4. $6x^2-17x+5=0$. $\left\{2\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$

5. $21x^2-22x-8=0$. $\left\{-\frac{2}{7};1\frac{1}{3}\right\}$

6. $9x^2-6x-8=0$. $\left\{-\frac{2}{3};1\frac{1}{3}\right\}$

7. $2x^2+x-3=0$. $\left\{1;-1\frac{1}{2}\right\}$

8. $5x^2-26x+5=0$. $\left\{5;\frac{1}{5}\right\}$

9. $5x^2-8x-4=0$. $\left\{2;-\frac{2}{5}\right\}$

10. $21x^2+4x-1=0$. $\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{7}\right\}$

Карточка 4

1. $8x^2+14x-15=0$. $\left\{\frac{3}{4};-2\frac{1}{2}\right\}$

2. $-8x^2-22x+21=0$. $\left\{\frac{3}{4};-3\frac{1}{2}\right\}$

3. $5x^2+17x+6=0$. $\left\{-\frac{2}{5};-3\right\}$

4. $12x^2-23x+5=0$. $\left\{\frac{1}{4};\frac{5}{3}\right\}$

5. $6x^2-13x-28=0$. $\left\{-1\frac{1}{3};3\frac{1}{2}\right\}$

6. $15x^2-14x-8=0$. $\left\{1\frac{1}{3};-\frac{2}{5}\right\}$

7. $3x^2+2x-5=0$. $\left\{1;-\frac{5}{3}\right\}$

8. $8x^2-6x+1=0$. $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\}$

9. $4x^2+4x-3=0$. $\left\{\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right\}$

10. $22x^2-9x-1=0$. $\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{11}\right\}$

Проверочные карточки заданий на решение простейших квадратных уравнений

Карточка 1

1. $8x^2-2x-3=0$.
2. $6x^2+5x-6=0$.
3. $-6x^2+19x+7=0$.
4. $10x^2-7x+1=0$.
5. $-4x^2-6x+18=0$.
6. $-15x^2+23x-4=0$.
7. $2x^2+x-10=0$.
8. $12x^2+5x-3=0$.
9. $18x^2-21x+5=0$.
10. $6x^2-13x-8=0$.

Карточка 2

1. $6x^2-5x-6=0$.
2. $12x^2+7x+1=0$.
3. $8x^2+2x-3=0$.
4. $-6x^2-19x+7=0$.
5. $15x^2+23x+4=0$.
6. $-4x^2+6x+18=0$.
7. $18x^2+21x+5=0$.
8. $2x^2-x-10=0$.
9. $6x^2+13x-8=0$.
10. $12x^2-5x-2=0$.

Карточка 3

1. $3x^2+2x-8=0$.
2. $6x^2-13x+6=0$.
3. $7x^2-19x-6=0$.
4. $10x^2+7x+1=0$.
5. $18x^2-6x-4=0$.
6. $4x^2+23x+15=0$.
7. $10x^2-x-2=0$.
8. $2x^2-5x-12=0$.
9. $5x^2+21x+18=0$.
10. $8x^2-13x-6=0$.

Карточка 4

1. $6x^2+13x+6=0$.
2. $10x^2-7x-6=0$.
3. $3x^2-2x-8=0$.
4. $7x^2+19x-6=0$.
5. $4x^2-23x+15=0$.
6. $18x^2-23x+5=0$.
7. $4x^2+6x-18=0$.
8. $10x^2+x-2=0$.
9. $8x^2+13x-6=0$.
10. $2x^2+5x-12=0$.

Решение квадратных уравнений с иррациональными корнями и приводящихся к ним

Практикум 6

1. $2x^2+7x+2=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-16}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}.$$

Ответ: $\left\{\frac{-7-\sqrt{33}}{4};\frac{-7+\sqrt{33}}{4}\right\}$.

2. $6x^2-\left(3\sqrt{3}-2\right)x-\sqrt{3}=0$.

$$x_{1,2}=\frac{3\sqrt{3}-2\pm\sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\right)^2+24\sqrt{3}}}{12}=\frac{3\sqrt{3}-2\pm\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-12\sqrt{3}+2^2+24\sqrt{3}}}{12}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-2\pm\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+12\sqrt{3}+2^2}}{12}=\frac{3\sqrt{3}-2\pm\left(3\sqrt{3}+2\right)}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\sqrt{3}-2+3\sqrt{3}+2}{12} \\ x=\frac{3\sqrt{3}-2-3\sqrt{3}-2}{12} \end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{3}\right\}$.

3. $6x^2-\sqrt{5}x-5=0$.

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+4\cdot6\cdot5}}{12}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5+120}}{12}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{125}}{12}=\frac{\sqrt{5}\pm5\sqrt{5}}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x=-\frac{\sqrt{5}}{3} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

4. $3\sqrt{6}x^2-\left(3-\sqrt{6}\right)x-1=0$.

$$x_{1,2}=\frac{\left(3-\sqrt{6}\right)\pm\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2+12\sqrt{6}}}{6\sqrt{6}}=\frac{3-\sqrt{6}\pm\sqrt{3^2-6\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2+12\sqrt{6}}}{6\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{3-\sqrt{6}\pm\sqrt{3^2+6\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2}}{6\sqrt{6}}=\frac{3-\sqrt{6}\pm\left(3+\sqrt{6}\right)}{6\sqrt{6}};$$

$$x_1=\frac{3-\sqrt{6}+3+\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}=\frac{6}{6\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6};\quad x_2=\frac{3-\sqrt{6}-\left(3+\sqrt{6}\right)}{6\sqrt{6}}=\frac{-2\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3};\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$.

5. $\frac{(3x-2)^2}{4}-\frac{(3-x)^2}{3}=1\quad\big|\cdot 12;\quad 3(3x-2)^2-4\left(9-6x+x^2\right)=12;$

$3\left(9x^2-12x+4\right)-4\left(9-6x+x^2\right)=12;$

$27x^2-36x+12-36+24x-4x^2=12;\quad 23x^2-12x-36=0;$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+23\cdot 36}}{23}=\frac{6\pm6\sqrt{1+23}}{23}=\frac{6\pm12\sqrt{6}}{23}.$$

Ответ: $\left\{\frac{6-12\sqrt{6}}{23};\ \frac{6+12\sqrt{6}}{23}\right\}$.

6. $(8x-9)(3x+2)-(2x-3)(8x-2)=33x+21$.

$24x^2-11x-18-16x^2+28x-6-33x-21=0;$

$8x^2-16x-45=0;$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+8\cdot 45}}{8}=\frac{8\pm\sqrt{424}}{8}=\frac{8\pm2\sqrt{106}}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4+\sqrt{106}}{4} \\ x=\dfrac{4-\sqrt{106}}{4} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{4-\sqrt{106}}{4};\ \frac{4+\sqrt{106}}{4}\right\}$.

Уравнения, приводящиеся к квадратным

Практикум 7

1. $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{4x+2}{3x-2}$; $\qquad D(У):\ \begin{cases}x+1\neq 0\\3x-2\neq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\neq -1\\x\neq \frac{2}{3}\end{cases}$.

$(2x-1)(3x-2)=(4x+2)(x+1)$;

$6x^2-7x+2=4x^2+6x+2$; $\quad 2x^2-13x=0$;

$\left[\begin{array}{l}x=0\\x=6,5\end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\{0;\ 6,5\}$.

2. $\frac{32}{x+1}+\frac{21}{x-1}=3,5$; $\qquad D(У):\ \begin{cases}x+1\neq 0\\x-1\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq -1\\x\neq 1\end{cases}$;

$32(x-1)+21(x+1)=3,5(x+1)(x-1)$; $\quad |\cdot 2$

$64(x-1)+42(x+1)=7(x^2-1)$;

$64x-64+42x+42=7x^2-7$;

$7x^2-106x+15=0$; $\quad$ (формула C)

$x_{1,2}=\frac{53\pm\sqrt{53^2-7\cdot 15}}{7}=\frac{53\pm\sqrt{2809-105}}{7}=\frac{53\pm 52}{7}$;

$\left[\begin{array}{l}x=15\\x=\frac{1}{7}\end{array}\right.$; $\quad x\in D(У)$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{7};\ 15\right\}$.

3. $\frac{1}{x^2+7x}=\frac{1}{x^2+7x+6}$; $\qquad D(У):\ \begin{cases}x^2+7x\neq 0\\x^2+7x+6\neq 0\end{cases}$;

$x^2+7x=x^2+7x+6$;

$0=6$ — ложь.

Ответ: $\varnothing$.

4. $\frac{2x+1}{4x-1}=\frac{5(3x+5)}{8(6x-1)}$. $D(y)$: $\begin{cases}4x-1\neq 0\\ 6x-1\neq 0\end{cases}$.

$8(2x+1)(6x-1)=5(3x+5)(4x-1)$;

$8\left(12x^2+4x-1\right)=5\left(12x^2+17x-5\right)$;

$96x^2+32x-8=60x^2+85x-25$; $36x^2-53x+17=0$;

$x_{1,2}=\frac{53\pm\sqrt{2809-4\cdot 36\cdot 17}}{72}=\frac{53\pm\sqrt{361}}{72}=\frac{53\pm 19}{72}\in D(y)$.

Ответ: $\left\{\frac{17}{36};\ 1\right\}$.

5. $3x+x^2=\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)^2$; $\left(x^2+3x\right)\left(1-\frac{x^2+3x}{4}\right)=0$;

$\left(x^2+3x\right)\left(4-x^2-3x\right)=0$; $-\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x-4\right)=0$;

$\left[\begin{array}{l}x^2+3x=0\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-3\\ x=1\\ x=-4\end{array}\right.$.

Ответ: $\{-4;\ -3;\ 0;\ 1\}$.

6. $\frac{(x+7)^2}{2}-\frac{x^2+5x}{3}=6+\frac{(5x+11)^2}{4}$; $|\cdot 12$

$6(x+7)^2-4\left(x^2+5x\right)=72+3(5x+11)^2$;

$6\left(x^2+14x+49\right)-4x^2-20x=72+3\left(25x^2+110x+121\right)$;

$6x^2+84x+294-4x^2-20x=72+75x^2+330x+363$;

$73x^2+266x+141=0$;

$x_{1,2}=\frac{-133\pm\sqrt{(133)^2-73\cdot 141}}{73}=\frac{-133\pm\sqrt{17689-10293}}{73}=\frac{-133\pm\sqrt{7396}}{73}=\frac{-133\pm 86}{73}$;

$x_1=\frac{-133+86}{73}=-\frac{47}{73}$; $x_2=\frac{-133-86}{73}=-\frac{219}{73}=-3$.

Ответ: $\left\{-3;\ -\frac{47}{73}\right\}$.

7. $(2x+1)^2(5-x)=(x-1)^2(5-4x)$.

$(4x^2+4x+1)(5-x)-(x^2-2x+1)(5-4x)=0$;

$20x^2+20x+5-4x^3-4x^2-x-(5x^2-10x+5-4x^3+8x^2-4x)=0$;

$-4x^3+16x^2+19x+5+4x^3-13x^2+14x-5=0$;

$3x^2+33x=0$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-11 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{0;-11\}$.

8. $\frac{x^3-8}{2x-4}=12x-18$; $D(У)$: $2x-4\neq 0$; $x\neq 2$.

$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}=12x-18$;

$\frac{x^2+2x+4}{2}=12x-18$; $x^2+2x+4=24x-36$;

$x^2-22x+40=0$;

$x_{1,2}=11\pm\sqrt{11^2-40}=11\pm 9$; $\left[\begin{array}{ll} x=20 & \\ x=2 & \notin D(У) \end{array}\right.$.

Ответ: $x=20$.

9. $\frac{x^4-625}{25-x^2}=8x-90$; $D(У)$: $25-x^2\neq 0$;

$(x+5)(x-5)\neq 0$;

$\left\{\begin{array}{l} x\neq 5 \\ x\neq -5 \end{array}\right.$.

$\frac{(x^2-25)(x^2+25)}{25-x^2}=8x-90$;

$-x^2-25=8x-90$;

$x^2+8x-65=0$;

$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{16+65}=-4\pm 9$;

$\left[\begin{array}{ll} x=5 & \notin D(У) \\ x=-13 & \end{array}\right.$.

Ответ: $x=-13$.

10. $\frac{5x^2+7x+2}{4x^2-x-5}=\frac{(4x+5)^2}{16x^2-25}$; $\qquad D(У)$: $\begin{cases} 4x^2-x-5\neq 0 \\ 16x^2-25\neq 0 \end{cases}$.

Решим уравнения:

а) $4x^2-x-5=0$.

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{8}=\frac{1\pm 9}{8};\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{4} \\ x=-1 \end{array}\right.,\ \text{значит}\ D(У): \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq \pm\frac{5}{4} \end{cases},$$

тогда, зная, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1; x_2 — корни, разложим на множители:

$$4x^2-x-5=4\left(x-\frac{5}{4}\right)(x+1)=(4x-5)(x+1).$$

б) $5x^2+7x+2=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{10}=\frac{-7\pm 3}{10};\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{2}{5} \end{array}\right.,\ \text{итак}$$

$$5x^2+7x+2=5\left(x+\frac{2}{5}\right)(x+1)=(5x+2)(x+1).$$

Итак $D(У)$: $\begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq \pm\frac{5}{4} \end{cases}$;

$$\frac{(5x+2)(x+1)}{(4x-5)(x+1)}=\frac{(4x+5)^2}{(4x-5)(4x+5)}.$$

После сокращения имеем:

$\frac{5x+2}{4x-5}=\frac{4x+5}{4x-5}$, значит $5x+2=4x+5$;

$x=3\in D(У)$.

Ответ: $x=3$.

Примечание. Разумеется, в окончательном виде это уравнение приводится к линейному, но для его решения нужно уметь решать квадратные уравнения и раскладывать на множители квадратный трехчлен.

Тренировочная работа 5

Решите уравнения:

1. $3x^2-7x+3=0$.

2. $6x^2+\left(3\sqrt{3}+2\right)x+\sqrt{3}=0$.

3. $3\sqrt{6}x^2+\left(3+\sqrt{6}\right)x+1=0$.

4. $\dfrac{(4x+3)^2}{5}-\dfrac{(5-x)^2}{4}=1$.

5. $(4x+5)(3x-7)-(x+2)(4x-2)=72-33x$.

6. $(x-0,5)\left(x^2-9\right)=(2x-1)(x-3)^2$.

7. $(x-1)(x+2)^3-\left(x^2+4x+4\right)\left(x^2+x\right)+8=0$.

8. $\dfrac{3x+7}{x-2}=\dfrac{6x-1}{3x+1}$.

9. $\dfrac{7-5x}{x+2}+\dfrac{2x-21}{x-2}+8\dfrac{2}{3}=0$.

10. $\dfrac{40}{12-x}+\dfrac{35}{12+x}=6,5$.

11. $\dfrac{8x^3+27}{4x+6}=5x+21$.

12. $\dfrac{16x^4-1}{16x^2-4}=2,5-4x$.

13. $\dfrac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16}=\dfrac{(6x+4)^2}{36x^2-16}$.

14. $\dfrac{7-2x}{x^2-5x-6}+\dfrac{3}{x^2-9x+18}=\dfrac{1}{3-x}$.

Решение тренировочной работы 5

1. $3x^2-7x+3=0$. $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-36}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$.

Ответ: $\left\{\frac{7-\sqrt{13}}{6};\ \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right\}$.

2. $6x^2+\left(3\sqrt{3}+2\right)x+\sqrt{3}=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-\left(3\sqrt{3}+2\right)\pm\sqrt{\left(3\sqrt{3}+2\right)^2-24\sqrt{3}}}{12}=\frac{-\left(3\sqrt{3}+2\right)\pm\left(3\sqrt{3}-2\right)}{12};$$

$x_1=\frac{-3\sqrt{3}-2+3\sqrt{3}-2}{12}$; $x_1=-\frac{1}{3}$;

$x_2=\frac{-3\sqrt{3}-2-3\sqrt{3}+2}{12}$; $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $\left\{-\frac{1}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3. $3\sqrt{6}x^2+\left(3+\sqrt{6}\right)x+1=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-\left(3+\sqrt{6}\right)\pm\sqrt{\left(3+\sqrt{6}\right)^2-12\sqrt{6}}}{6\sqrt{6}}=\frac{-\left(3+\sqrt{6}\right)\pm\left(3-\sqrt{6}\right)}{6\sqrt{6}};$$

$x_1=\frac{-3-\sqrt{6}+3-\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}=-\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{-3-\sqrt{6}-3+\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$.

4. $\frac{(4x+3)^2}{5}-\frac{(5-x)^2}{4}=1 \quad |\cdot 20$; $4(4x+3)^2-5(5-x)^2=20$;

$4\left(16x^2+24x+9\right)-5\left(25-10x+x^2\right)=20$;

$64x^2+96x+36-125+50x-5x^2-20=0$; $59x^2+146x-109=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-73\pm\sqrt{73^2+109\cdot 59}}{59}=\frac{-73\pm\sqrt{11760}}{59}.$$

Ответ: $\left\{\frac{-73-28\sqrt{15}}{59};\ \frac{-73+28\sqrt{15}}{59}\right\}$.

5. $(4x+5)(3x-7)-(x+2)(4x-2)=72-33x$.

$12x^2-13x-35-(4x^2+6x-4)-72+33x=0$;

$8x^2+14x-103=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+824}}{8}=\dfrac{-7\pm\sqrt{873}}{8}=\dfrac{-7\pm3\sqrt{97}}{8}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{-7-3\sqrt{97}}{8};\ \dfrac{-7+3\sqrt{97}}{8}\right\}$.

6. $(x-0,5)(x^2-9)=(2x-1)(x-3)^2$.

$(x-0,5)(x+3)(x-3)-2(x-0,5)(x-3)^2=0$;

$(x-0,5)(x-3)(x+3-2(x-3))=0$;

$(x-0,5)(x-3)(9-x)=0$;

$\left[\begin{array}{l}x=0,5\\x=3\\x=9\end{array}\right.$.

Ответ: $\{0,5;\ 3;\ 9\}$.

7. $(x-1)(x+2)^3-(x^2+4x+4)(x^2+x)+8=0$.

$(x-1)(x+2)^3-(x+2)^2(x^2+x)+8=0$;

$(x+2)^2\left((x-1)(x+2)-(x^2+x)\right)+8=0$;

$(x+2)^2(x^2+x-2-x^2-x)+8=0$;

$(x+2)^2(-2)+8=0$;

$(x+2)^2-4=0$;

$(x+2+2)(x+2-2)=0$;

$\left[\begin{array}{l}x+4=0\\x=0\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=0\end{array}\right.$.

Ответ: $\{0;-4\}$.

8. $\dfrac{3x+7}{x-2}=\dfrac{6x-1}{3x+1}$. $\quad D(У):\ \begin{cases} x-2\neq 0 \\ 3x+1\neq 0 \end{cases};\ \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

$9x^2+24x+7=6x^2-13x+2;\quad 3x^2+37x+5=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{-37\pm\sqrt{37^2-4\cdot3\cdot5}}{6}=\dfrac{-37\pm\sqrt{1309}}{6}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{-37-\sqrt{1309}}{6};\ \dfrac{-37+\sqrt{1309}}{6}\right\}$.

9. $\dfrac{7-5x}{x+2}+\dfrac{2x-21}{x-2}+8\dfrac{2}{3}=0\quad\Big|\cdot3;$ $\qquad D(У):\ x\neq\pm2$

$\dfrac{3(7-5x)^{\lfloor x-2}}{x+2}+\dfrac{3(2x-21)^{\lfloor x+2}}{x-2}+26^{\lfloor (x+2)(x-2)}=0;$

$3(7-5x)(x-2)+3(2x-21)(x+2)+26(x+2)(x-2)=0;$

$3\left(-5x^2+17x-14\right)+3\left(2x^2-17x-42\right)+26x^2-104=0;$

$-15x^2+51x-42+6x^2-51x-126+26x^2-104=0;$

$17x^2-272=0;\quad x^2-16=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right. \in D(У).$

Ответ: $\{-4;\ 4\}$.

10. $\dfrac{40}{12-x}+\dfrac{35}{12+x}=6{,}5\quad\Big|\cdot2;$

$\dfrac{80}{12-x}+\dfrac{70}{12+x}=13\qquad D(У):\ \begin{cases} 12-x\neq 0 \\ 12+x\neq 0 \end{cases};\ \begin{cases} x\neq 12 \\ x\neq -12 \end{cases};$

$80(12+x)+70(12-x)=13(12+x)(12-x);$

$960+80x+840-70x-13\left(144-x^2\right)=0;$

$13x^2+10x+1800-1872=0;\quad 13x^2+10x-72=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+13\cdot72}}{13}=\dfrac{-5\pm31}{13};\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2\dfrac{10}{13} \end{array}\right. \in D(У).$

Ответ: $\left\{2;-2\dfrac{10}{13}\right\}$.

11. $\frac{8x^3+27}{4x+6}=5x;+21$ $\qquad D(У)$: $4x+6\neq 0$; $x\neq -1{,}5$.

$$\frac{(2x+3)(4x^2-6x+9)}{2(2x+3)}=5x+21;\ 4x^2-6x+9=10x+42;$$

$$4x^2-16x-33=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+4\cdot 33}}{4}=\frac{8\pm 14}{4};\ \left[\begin{array}{l}x=5{,}5\\ x=-1{,}5\notin D(У).\end{array}\right.$$

Ответ: $\{5{,}5\}$.

12. $\frac{16x^4-1}{16x^2-4}=2{,}5-4x$; $\qquad D(У)$: $16x^2-4\neq 0$; $x\neq\pm\frac{1}{2}$.

$$\frac{(4x^2+1)(4x^2-1)}{4(4x^2-1)}=2{,}5-4x;$$

$$4x^2+1=10-16x;\quad 4x^2+16x-9=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{4}=\frac{-8\pm 10}{4};\ \left[\begin{array}{l}x=0{,}5\notin D(У)\\ x=-4.5\end{array}\right..$$

Ответ: $\{-4{,}5\}$

13. $\frac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16}=\frac{(6x+4)^2}{36x^2-16}$; $\qquad D(У)$: $\begin{cases}6x^2+20x-16\neq 0\\ 36x^2-16\neq 0\end{cases}$.

Вначале разложим числитель и знаменатель на множители:

а) $6x^2+20x-16=0$;

$$3x^2+10x-8=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{3}=\frac{-5\pm 7}{3};\ \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=\frac{2}{3}\end{array}\right..$$

Значит:

$$6x^2+20x-16=6(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right)=2(x+4)(3x-2);$$

б) $2x^2+3x-20=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{4}=\frac{-3\pm13}{4};\qquad \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=2,5\end{array}\right..$$

тогда $2x^2+3x-20=2(x+4)(x-2,5)=(x+4)(2x-5)$;

в) $(6x+4)^2=(2(3x+2))^2=4(3x+2)^2$.

Теперь уравнение примет вид:

$$\frac{(2x-5)(x+4)}{2(x+4)(3x-2)}-\frac{4(3x+2)^2}{4(3x+2)(3x-2)}=0,\ \text{значит}\ D(У):\begin{cases}x\neq-4\\ x\neq\pm\dfrac{2}{3}\end{cases};$$

$$\frac{2x-5}{2(3x-2)}-\frac{4(3x+2)}{4(3x-2)}=0;\quad \frac{2x-5-2(3x+2)}{2(3x-2)}=0;$$

$2x-5-6x-4=0$;

$-4x-9=0$;

$x=-\dfrac{9}{4}\in D(У)$.

Ответ: $x=-2,25$.

14. $\dfrac{7-2x}{x^2-5x-6}+\dfrac{3}{x^2-9x+18}=\dfrac{1}{3-x}$. $\qquad D(У):\begin{cases}x\neq-1\\ x\neq3\\ x\neq6\end{cases}.$

1. а) $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$;

   б) $x^2-9x+18=(x-6)(x-3)$.

2. $\dfrac{7-2x}{(x-6)(x+1)}+\dfrac{3}{(x-3)(x-6)}+\dfrac{1}{x-3}=0$.

   $(7-2x)(x-3)+3(x+1)+(x-6)(x+1)=0$;

$-2x^2+13x-21+3x+3+x^2-5x-6=0$;

$-x^2+11x-24=0$; $\quad x^2-11x+24=0$;

$$\left[\begin{array}{l}x=3\notin D(У)\\ x=8\end{array}\right..$$

Ответ: $x=8$.

Решение квадратных уравнений и приводящихся к ним

Практикум 8

1. $2x^2+3x=2\left(2-\sqrt{6}\right)^2+3\left(2-\sqrt{6}\right)$.

$2\left(x^2-\left(2-\sqrt{6}\right)^2\right)+3\left(x-\left(2-\sqrt{6}\right)\right)=0$;

$2\left(x-\left(2-\sqrt{6}\right)\right)\left(x+\left(2-\sqrt{6}\right)\right)+3\left(x-\left(2-\sqrt{6}\right)\right)=0$;

$\left(x-\left(2-\sqrt{6}\right)\right)\left(2\left(x+\left(2-\sqrt{6}\right)\right)+3\right)=0$;

$\left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{6} \\ 2\left(x+2-\sqrt{6}\right)+3=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{6} \\ x+2-\sqrt{6}=-1{,}5 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{6} \\ x=-3{,}5+\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{2-\sqrt{6};-3{,}5+\sqrt{6}\right\}$.

2. $\frac{6}{7x-21}-\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{x^2-9}=0$. $D(У)$: $x\neq\pm 3$.

$\frac{6^{\lfloor(x-3)(x+3)}}{7(x-3)}-\frac{1^{\lfloor 7(x+3)}}{(x-3)^2}+\frac{1^{\lfloor 7(x-3)}}{(x+3)(x-3)}=0$;

$\frac{6(x-3)(x+3)-7(x+3)+7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)}=0$;

$6\left(x^2-9\right)-7x-21+7x-21=0$; $6x^2-96=0$; $x^2-16=0$;

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\{-4;\ 4\}$.

3. $\frac{1}{x-4}-\frac{x+4}{2x^2+13x-45}-\frac{3}{20-13x+2x^2}=0$

а) $2x^2-13x+20=0$;

$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-160}}{4}=\frac{13\pm 3}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2{,}5 \end{array}\right.$.

б) $2x^2+13x-45=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169+360}}{4}=\frac{-13\pm 23}{4};\quad \left[\begin{array}{l}x=2{,}5\\ x=-9\end{array}\right..$$

$$\frac{1}{x-4}-\frac{x+4}{(2x-5)(x+9)}-\frac{3}{(x-4)(2x-5)}=0;\qquad D(У):\ \begin{cases}x\neq 2{,}5\\ x\neq 4\\ x\neq -9\end{cases}.$$

$$(2x-5)(x+9)-(x+4)(x-4)-3(x+9)=0;$$

$$2x^2+13x-45-x^2+16-3x-27=0;\quad x^2+10x-56=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=4\quad \notin D(У)\\ x=-14\end{array}\right..$$

Ответ: $x=-14$.

4. $\dfrac{2x+8}{3x+7}\left(\dfrac{x+4}{2x^2+x-3}-\dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}\right)=\dfrac{6x-7}{2x+3}$.

1. а) $2x^2+x-3=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\dfrac{-1\pm 5}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$;

$$2x^2+x-3=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x+3);$$

б) $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$;

2. $$\frac{2(x+4)}{3x+7}\left(\frac{x+4^{\lfloor x+4}}{(x-1)(2x+3)}-\frac{2x+3^{\lfloor 2x+3}}{(x+4)(x-1)}\right)-\frac{6x-7}{2x+3}=0;\quad D(У):\ \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -1{,}5\\ x\neq -4\\ x\neq -2\frac{1}{3}\end{cases}.$$

$$\frac{2(x+4)}{3x+7}\cdot\frac{(x+4)^2-(2x+3)^2}{(x-1)(2x+3)(x+4)}-\frac{6x-7}{2x+3}=0;$$

$$\frac{2\cancel{(x+4)}(x+4+2x+3)(x+4-2x-3)}{(3x+7)(x-1)(2x+3)\cancel{(x+4)}}-\frac{6x-7}{2x+3}=0;$$

$$\frac{2\cancel{(3x+7)}\cancel{(1-x)}}{\cancel{(3x+7)}\cancel{(x-1)}(2x+3)}-\frac{6x-7}{2x+3}=0;\quad \frac{-2}{2x+3}-\frac{6x-7}{2x+3}=0;$$

$$\frac{-2-6x+7}{2x+3}=0;\quad \frac{5-6x}{2x+3}=0;\quad x=\frac{5}{6}\in D(У).$$

Ответ: $x=\dfrac{5}{6}$.

5. $\frac{6x^2-5x-6}{2x-3}=\frac{4-9x^2}{3x-2}$. $D(У)$: $\begin{cases} x \neq 1\frac{1}{2} \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$.

Можно сразу воспользоваться свойствами пропорции (произведение крайних равно произведению средних), но это технически утомительно, попробуем разложить числители дробей на множители, может удастся сократить.

а) $6x^2-5x-6=0$; $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\frac{5\pm13}{12}$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$;

$$6x^2-5x-6=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(2x-3)(3x+2);$$

б) $4-9x^2=(2-3x)(2+3x)$;

$$\frac{\cancel{(2x-3)}(3x+2)}{\cancel{2x-3}}-\frac{\cancel{(2-3x)}(2+3x)}{\cancel{3x-2}}=0;$$

$3x+2+2+3x=0$; $6x+4=0$; $x=-\frac{2}{3}\in D(У)$.

Ответ: $x=-\frac{2}{3}$.

6. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2-3x+1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8}$; $D(У)$: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Здесь рациональнее в начале выделить целые части в дробях левой части уравнения, пользуясь свойством $\frac{c\cdot a+b}{a}=\frac{c\cdot a}{a}+\frac{b}{a}=c+\frac{b}{a}$, тогда:

а) $\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{x^2-x}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}+\frac{1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{x^2-3x+1}{x-3}=\frac{x^2-3x}{x-3}+\frac{1}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}=x+\frac{1}{x-3}$.

Уравнение примет вид:

$$x+\frac{1}{x-1}+x+\frac{1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8};\qquad \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{4x-8}=0;$$

$$\frac{1^{\underline{|4(x-3)(x-2)}}}{x-1}+\frac{1^{\underline{|4(x-1)(x-2)}}}{x-3}+\frac{1^{\underline{|(x-1)(x-3)}}}{4(x-2)}=0;$$

$$\frac{4(x-3)(x-2)+4(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)}{4(x-1)(x-2)(x-3)}=0;$$

$$4\left(x^2-5x+6\right)+4\left(x^2-3x+2\right)+x^2-4x+3=0;$$

$$9x^2-36x+35=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{18^2-9\cdot 35}}{9}=\frac{18\pm\sqrt{324-315}}{9}=\frac{18\pm 3}{9};\qquad \left[\begin{array}{l} x=2\frac{1}{3}\in D(У) \\ x=1\frac{2}{3}\in D(У) \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{1\frac{2}{3};\ 2\frac{1}{3}\right\}$.

7. $\frac{1}{1+2x}-\frac{2}{2+3x}+\frac{3}{3+4x}=\frac{4}{4+5x}$;

$$D(У):\ \begin{cases} x\neq-\frac{1}{2} \\ x\neq-\frac{2}{3} \\ x\neq-\frac{3}{4} \\ x\neq-\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Перегруппируем:

$$\frac{3}{3+4x}-\frac{2}{2+3x}=\frac{4}{4+5x}-\frac{1}{1+2x};$$

$$\frac{3(2+3x)-2(3+4x)}{(3+4x)(2+3x)}=\frac{4(1+2x)-(4+5x)}{(4+5x)(1+2x)};$$

$$\frac{6+9x-6-8x}{(3+4x)(2+3x)}=\frac{4+8x-4-5x}{(4+5x)(1+2x)};\qquad \frac{x}{(3+4x)(2+3x)}=\frac{3x}{(4+5x)(1+2x)};$$

а) $x=0\in D(У)$;

б) $(4+5x)(1+2x)=3(3+4x)(2+3x)$;

$$10x^2+13x+4=36x^2+51x+18;\qquad 26x^2+38x+14=0;$$

$$13x^2+19x+7=0;\qquad x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{361-364}}{26};\qquad x\in\varnothing.$$

Ответ: $x=0$.

8. $\frac{3-x}{x^2+2x-3}=\frac{9-3x}{3x^2-2x-5}$.

Здесь лучше разложить числитель на множители и попытаться вынести общий множитель.

$\frac{3-x}{x^2+2x-3}-\frac{3(3-x)}{3x^2-2x-5}=0$; $(3-x)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}-\frac{3}{3x^2-2x-5}\right)=0$, затем

а) $3-x=0$; $x=3$; б) $\frac{1}{x^2+2x-3}-\frac{3}{3x^2-2x-5}=0$;

И здесь мы сначала приведем к общему знаменателю, и только потом разложим знаменатель на множители.

$\frac{3x^2-2x-5-3(x^2+2x-3)}{(x^2+2x-3)(3x^2-2x-5)}=0$; $\frac{3x^2-2x-5-3x^2-6x+9}{(x^2+2x-3)(3x^2-2x-5)}=0$;

в) $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$;

г) $3x^2-2x-5=(x+1)(3x-5)$, тогда $D(У)$: $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1 \\ x\neq -3 \\ x\neq 1\frac{2}{3} \end{cases}$;

$\frac{4(1-2x)}{(x+3)(x-1)(x+1)(3x-5)}=0$;

д) $1-2x=0$; $x=\frac{1}{2}\in D(У)$. е) $x=3\in D(У)$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};3\right\}$.

9. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$.

Весьма любопытный пример. Можно, конечно, стандартным образом привести к общему знаменателю и т. д. Но этот способ очень кропотлив и технически сложен. Попробуем взглянуть на этот пример с другой стороны. При внимательном подходе, очевидно, что слева имеем выражение не выше второй степени относительно x.

Напомним, что два квадратных трехчлена

$y_1=a_1x^2+b_1x+c_1$ и $y_2=a_2x^2+b_2x+c_2$ являются равными, только если: $a_1=a_2$; $b_1=b_2$; $c_1=c_2$.

Известно так же, что любой квадратный трехчлен однозначно определяется тремя точками.

Пусть

а) $x=b$, тогда $L=0+\dfrac{(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)}+0=1$;

$\Pi=1$, отсюда следует, что $L=\Pi$;

б) $x=a$, тогда $L=\dfrac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+0+0=1$;

$\Pi=1$, отсюда следует, что $L=\Pi$;

в) $x=c$, тогда $L=0+0+\dfrac{(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)}=1$;

$\Pi=1$, отсюда следует, что $L=\Pi$.

Значит для трех точек: $A(b;1)$, $B(a;1)$, $C(c;1)$, левая и правая части уравнения совпадают, тогда мы имеем дело с тождеством для любых допустимых значений букв a; b; c $(a\neq b;\ b\neq c;\ a\neq c)$.

Ответ: любое $x-$ есть решение этого уравнения при $a\neq b$; $b\neq c$; $a\neq c$.

10. $\dfrac{x+2}{x^2-7x}+\dfrac{x-2}{x^2-x-6}=\dfrac{2x-3{,}2}{x^2-5x-14}$.

$$\frac{x+2}{x^2-7x}+\frac{x-2}{(x-3)(x+2)}-\frac{2x-3{,}2}{(x-7)(x+2)}=0;$$

$$\frac{(x+2)^2(x-3)+(x-2)x(x-7)-(2x-3{,}2)x(x-3)}{x(x-7)(x-3)(x+2)}=0;\quad D(У):\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 3\\ x\neq 7\\ x\neq -2\end{cases}.$$

$$(x^2+4x+4)(x-3)+x(x^2-9x+14)-x(2x^2-9{,}2x+9{,}6)=0;$$

$$x^3+x^2-8x-12+x^3-9x^2+14x-2x^3+9{,}2x^2-9{,}6x=0;$$

$$1{,}2x^2-3{,}6x-12=0;\quad x^2-3x-10=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=-2\ \notin D(У)\end{array}\right..$$

Ответ: $x=5$.

Тренировочная работа 6

Решите уравнения

1. $x^2+2\left(1+\sqrt{8}\right)x+8\sqrt{2}=0$.

2. $(2x-1)^2(x+5)=(x+1)^2(4x+5)$.

3. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}\right)^2=1$.

4. $\frac{x+56}{9x^2-16}+\frac{1}{8-6x}=\frac{18}{3x^2+4x}$.

5. $\frac{2x+2}{2x^2+9x+10}=\frac{x+1}{4x^2+4x-15}$.

6. $\frac{14}{20-6x-2x^2}+\frac{x^2+4x}{x^2+5x}=\frac{x+3}{2-x}+3$.

7. $\left(\frac{4x+1}{2x^2+x-10}-\frac{4}{x^2-4}\right)\cdot\frac{4x^2+10x}{4x+9}+\frac{4}{x+2}=2$.

8. $\left(\frac{x^2+24}{4x^2-20x+25}+\frac{8}{5-2x}\right):\left(\frac{1}{4x^2-20x+25}-\frac{2}{2x^2+x-15}+\frac{1}{(x+3)^2}\right)=4$.

9. $\frac{4}{x^2-16}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x^3-16x-4x^2+64}$.

10. $\frac{x^2+x+3}{x+1}+\frac{x^2+3x+3}{x+3}=\frac{-3}{4x+8}+2x$.

11. $a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x$.

12. $\frac{x+3}{x^2-5x-6}+\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{2x-1{,}2}{x^2-3x-18}$.

Решение тренировочной работы 6

1. $x^2+2\left(1+\sqrt{8}\right)x+8\sqrt{2}=0$.

$$x_{1,2}=-\left(1+\sqrt{8}\right)\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{8}\right)^2-8\sqrt{2}}=$$

$$=-\left(1+2\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{1+2\cdot2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2}}=-\left(1+2\sqrt{2}\right)\pm\left(1-2\sqrt{2}\right);\quad \left[\begin{array}{l}x=-4\sqrt{2}\\x=-2\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-2;-4\sqrt{2}\right\}$.

2. $(2x-1)^2(x+5)=(x+1)^2(4x+5)$.

$$\left(4x^2-4x+1\right)(x+5)-\left(x^2+2x+1\right)(4x+5)=0;$$

$$4x^3-4x^2+x+20x^2-20x+5-4x^3-8x^2-4x-5x^2-10x-5=0;$$

$$3x^2-33x=0;\quad \left[\begin{array}{l}x=0\\x=11\end{array}\right..$$

Ответ: $\{0;\ 11\}$.

3. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}\right)^2=1$.

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}-1\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}+1\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}=1\\[2mm]\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}=-1\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\frac{4(11+4x)x+5(11+4x)-15}{8(11+4x)}=1\\[2mm]\frac{4(11+4x)x+5(11+4x)-15}{8(11+4x)}=-1\end{array}\right.;$$

$D(У)$: $x\neq-2{,}75$;

$$\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0\\x^2+6x+8=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=-2\\x=-4\end{array}\right.\in D(У).$$

Ответ: $\{-4;\ -3;\ -2;\ 1\}$.

4. $\dfrac{x+56}{9x^2-16}+\dfrac{1}{8-6x}=\dfrac{18}{3x^2+4x}$.

$$\frac{x+56}{(3x+4)(3x-4)}-\frac{1}{2(3x-4)}-\frac{18}{x(3x+4)}=0;\quad D(У):\ \begin{cases}x\neq 0\\ x\neq\pm 1\frac{1}{3}\end{cases};$$

$2(x+56)x-x(3x+4)-2\cdot 18(3x-4)=0$;

$2x^2+112x-3x^2-4x-108x+144=0$;

$-x^2+144=0$; $\left[\begin{array}{l}x=12\\ x=-12\end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\{-12;\ 12\}$.

5. $\dfrac{2x+2}{2x^2+9x+10}=\dfrac{x+1}{4x^2+4x-15}$.

$$(x+1)\left(\frac{2}{2x^2+9x+10}-\frac{1}{4x^2+4x-15}\right)=0;\quad (x+1)\frac{8x^2+8x-30-2x^2-9x-10}{(2x^2+9x+10)(4x^2+4x-15)}=0;$$

$$\frac{(x+1)(6x^2-x-40)}{(2x^2+9x+10)(4x^2+4x-15)}=0.$$

а) $2x^2+9x+10=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{81-80}}{4}=\dfrac{-9\pm 1}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-2,5\end{array}\right.$;

$2x^2+9x+10=2(x+2)(x+2,5)=(x+2)(2x+5)$;

б) $4x^2+4x-15=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{4}=\dfrac{-2\pm 8}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=-2,5\\ x=1,5\end{array}\right.$;

$4x^2+4x-15=4(x+2,5)(x-1,5)=(2x+5)(2x-3)$;

в) $6x^2-x-40=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+960}}{12}=\dfrac{1\pm 31}{12}$; $\left[\begin{array}{l}x=-2,5\\ x=2\frac{2}{3}\end{array}\right.$;

$6x^2-x-40=(3x-8)(2x+5)$;

$$\frac{(x+1)(3x-8)(2x+5)}{(x+2)(2x+5)(2x+5)(2x-3)}=0 \qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq -2{,}5 \\ x\neq 1{,}5 \end{cases}.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1\in D(У) \\ x=-2{,}5\notin D(У) \\ x=2\frac{2}{3}\in D(У) \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1;\ 2\frac{2}{3}\right\}$.

Можно было проще, если знать разложение.

$$(x+1)\left(\frac{2}{(x+2)(2x+5)}-\frac{1}{(2x+5)(2x-3)}\right)=0;$$

$$(x+1)\frac{2(2x-3)-(x+2)}{(x+2)(2x+5)(2x-3)}=0; \qquad \frac{(x+1)(3x-8)}{(x+2)(2x+5)(2x-3)}=0 \text{ и т. д.}$$

6. $\dfrac{14}{20-6x-2x^2}+\dfrac{x^2+4x}{x^2+5x}=\dfrac{x+3}{2-x}+3$.

$-2x^2-6x+20=0$;

$x^2+3x-10=0$;

$-2x^2-6x+20=-2(x+5)(x-2)$;

$$\frac{14}{-2(x+5)(x-2)}+\frac{x(x+4)}{x(x+5)}+\frac{x+3}{x-2}-3=0; \qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -5 \\ x\neq 0 \end{cases}.$$

$-7+(x+4)(x-2)+(x+3)(x+5)-3(x+5)(x-2)=0$;

$-7+x^2+2x-8+x^2+8x+15-3x^2-9x+30=0$;

$-x^2+x+30=0$;

$x^2-x-30=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-5\notin D(У) \end{array}\right..$$

Ответ: $x=6$.

7. $\left(\frac{4x+1}{2x^2+x-10}-\frac{4}{x^2-4}\right)\cdot\frac{4x^2+10x}{4x+9}+\frac{4}{x+2}=2$.

а) $2x^2+x-10=0$; $\quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\frac{-1\pm 9}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2,5 \end{array}\right.$.

$2x^2+x-10=2(x-2)(x+2,5)=(x-2)(2x+5)$;

б) $4x^2+x-18=0$; $\quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+288}}{8}=\frac{-1\pm 17}{8}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-\frac{9}{4} \\ x=2 \end{array}\right.$.

$4x^2+x-18=4(x-2)\left(x+\frac{9}{4}\right)=(x-2)(4x+9)$;

$\left(\frac{4x+1^{\llcorner x+2}}{(x-2)(2x+5)}-\frac{4^{\llcorner 2x+5}}{(x+2)(x-2)}\right)\frac{2x(2x+5)}{4x+9}+\frac{4}{x+2}=2$;

Тогда $D(У):\ \begin{cases} x\neq\pm2 \\ x\neq-2\frac{1}{2}; \\ x\neq-2\frac{1}{4} \end{cases}$

$\frac{(4x+1)(x+2)-4(2x+5)}{(x+2)(x-2)(2x+5)}\cdot\frac{2x(2x+5)}{4x+9}+\frac{4}{x+2}=2$;

$\frac{(4x^2+9x+2-8x-20)2x\cancel{(2x+5)}}{(x-2)\cancel{(2x+5)}(x+2)(4x+9)}+\frac{4}{x+2}=2$;

$\frac{(4x^2+x-18)2x}{(x-2)(x+2)(4x+9)}+\frac{4}{x+2}=2$; $\quad \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(4x+9)}2x}{\cancel{(x-2)}(x+2)\cancel{(4x+9)}}+\frac{4}{x+2}=2$;

$\frac{2x}{x+2}+\frac{4}{x+2}=2$; $\quad \frac{2x+4}{x+2}=2$; $\quad 2=2$ – любое $x\in D(У)$.

Ответ: любое x такое, что $\begin{cases} x\neq\pm2 \\ x\neq-2\frac{1}{2}. \\ x\neq-2\frac{1}{4} \end{cases}$

8. $\left(\dfrac{x^2+24}{4x^2-20x+25}+\dfrac{8}{5-2x}\right):\left(\dfrac{1}{4x^2-20x+25}-\dfrac{2}{2x^2+x-15}+\dfrac{1}{(x+3)^2}\right)=4$.

$2x^2+x-15=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\dfrac{-1\pm 11}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2,5 \end{array}\right.$. $\qquad D(У)$: $\begin{cases} x\neq 2,5 \\ x\neq -3 \end{cases}$.

$2x^2+x-15=2(x+3)(x-2,5)=(x+3)(2x-5)$;

$\left(\dfrac{x^2+24}{(2x-5)^2}-\dfrac{8}{2x-5}\right):\left(\dfrac{1}{(2x-5)^2}-\dfrac{2}{(x+3)(2x-5)}+\dfrac{1}{(x+3)^2}\right)=4$;

$\dfrac{x^2+24-8(2x-5)}{(2x-5)^2}:\left(\dfrac{1}{2x-5}-\dfrac{1}{x+3}\right)^2=4$; $\dfrac{x^2-16x+64}{(2x-5)^2}:\left(\dfrac{x+3-2x+5}{(2x-5)(x+3)}\right)^2=4$;

Дополнительное требование: $x\neq 8$ (чтобы было возмож но деление) итак:

$\dfrac{(x-8)^2}{(2x-5)^2}\cdot\left(\dfrac{(2x-5)(x+3)}{8-x}\right)^2=4$; $\qquad D(У)$: $\begin{cases} x\neq 2,5 \\ x\neq -3 \\ x\neq 8 \end{cases}$.

$(a-b)^2=(b-a)^2$; $\dfrac{(x-8)^2(2x-5)^2(x+3)^2}{(2x-5)^2(x-8)^2}=4$;

$(x+3)^2=4$; $\left[\begin{array}{l} x+3=2 \\ x+3=-2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-5 \end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\{-1;-5\}$.

9. $\dfrac{4}{x^2-16}-\dfrac{1}{x^2+8x+16}=\dfrac{10}{x^3-16x-4x^2+64}$.

Разложим на множители:

$x^3-4x^2-16x+64=x^2(x-4)-16(x-4)=$

$=(x-4)(x^2-16)=(x-4)^2(x+4)$;

$\dfrac{4}{(x+4)(x-4)}-\dfrac{1}{(x+4)^2}-\dfrac{10}{(x-4)^2(x+4)}=0$; $\qquad D(У)$: $\begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq -4 \end{cases}$.

$$4(x+4)(x-4)-(x-4)^2-10(x+4)=0;$$

$$4\left(x^2-16\right)-\left(x^2-8x+16\right)-10x-40=0;$$

$$4x^2-64-x^2+8x-16-10x-40=0;$$

$$3x^2-2x-120=0;\quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+360}}{3}=\frac{1\pm19}{3};\qquad \left[\begin{array}{l} x=6\frac{2}{3} \\ x=-6 \end{array}\right. \in D(У).$$

Ответ: $\left\{-6;\ 6\frac{2}{3}\right\}$.

10. $\frac{x^2+x+3}{x+1}+\frac{x^2+3x+3}{x+3}=\frac{-3}{4x+8}+2x$.

Выделим целую часть в каждой из дробей.

$$\frac{x^2+x}{x+1}+\frac{3}{x+1}+\frac{x^2+3x}{x+3}+\frac{3}{x+3}=\frac{-3}{4(x+2)}+2x\ ;\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq-1 \\ x\neq-2 \\ x\neq-3 \end{cases}.$$

$$\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{3}{x+1}+\frac{x(x+3)}{x+3}+\frac{3}{x+3}=\frac{-3}{4(x+2)}+2x;$$

$$x+\frac{3}{x+1}+x+\frac{3}{x+3}=\frac{-3}{4(x+2)}+2x;$$

$$\frac{3}{x+1}+\frac{3}{x+3}=\frac{-3}{4(x+2)};\quad \frac{x+3+x+1}{(x+1)(x+3)}=\frac{-1}{4(x+2)};$$

$$(2x+4)4(x+2)+(x+1)(x+3)=0;$$

$$8\left(x^2+4x+4\right)+x^2+4x+3=0;$$

$$8x^2+32x+32+x^2+4x+3=0;\quad 9x^2+36x+35=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{324-315}}{9}=\frac{-18\pm3}{9};\qquad \left[\begin{array}{l} x=-\frac{5}{3} \\ x=-\frac{7}{3} \end{array}\right. \in D(У).$$

Ответ: $\left\{-2\frac{1}{3};\ -1\frac{2}{3}\right\}$.

11. $a\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x$.

Учитывая, что слева функция не выше второй степени, которая однозначно определяется тремя точками, проверим это. Пусть

а) $x=b$, тогда $L=a\cdot 0+b\dfrac{(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)}+c\cdot 0=b$;

$\Pi=b$, отсюда следует, что $L=\Pi$;

б) $x=a$, тогда $L=a\dfrac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+b\cdot 0+c\cdot 0=a$;

$\Pi=a$, отсюда следует, что $L=\Pi$;

в) $x=c$, тогда $L=a\cdot 0+b\cdot 0+c\dfrac{(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)}=c$;

$\Pi=c$, отсюда следует, что $L=\Pi$.

Значит левая и правая части уравнения при трех значениях совпадают, тогда мы имеем дело с тождеством для любых допустимых значений букв a, b, c.

Ответ: любое x есть решение этого уравнения при $a\neq b$; $b\neq c$; $a\neq c$.

12. $\dfrac{x+3}{x^2-5x-6}+\dfrac{x-1}{x^2+x-6}=\dfrac{2x-1{,}2}{x^2-3x-18}$. $\quad D(У):\ \begin{cases} x\neq 6\\ x\neq 2\\ x\neq -1\\ x\neq -3\end{cases}$.

$$\frac{x+3}{(x-6)(x+1)}+\frac{x-1}{(x+3)(x-2)}=\frac{2x-1{,}2}{(x-6)(x+3)};$$

$$(x+3)^2(x-2)+(x-1)(x+1)(x-6)=(2x-1{,}2)(x-2)(x+1);$$

$$\left(x^2+6x+9\right)(x-2)+\left(x^2-1\right)(x-6)=(2x-1{,}2)\left(x^2-x-2\right);$$

$$x^3+4x^2-3x-18+x^3-6x^2-x+6-2x^3+3{,}2x^2+2{,}8x-2{,}4=0;$$

$$1{,}2x^2-1{,}2x-14{,}4=0\quad (:1{,}2);$$

$$x^2-x-12=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=4\\ x=-3\notin D(У)\end{array}\right..$$

Ответ: $x=4$.

Проверочная работа 4

Решите уравнения.

1. $\sqrt{3}x^2-2\left(\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)x+8\sqrt{6}=0$.

2. $(2x+1)^2(x-5)=(x-1)^2(4x-5)$.

3. $\dfrac{27x^3+125}{3x+5}+5+48x=0$.

4. $\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4}=\dfrac{(3x+2)^2}{9x^2-4}$.

5. $\left(\dfrac{15}{88-32x}-\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}x\right)^2=1$.

6. $\dfrac{4}{x^2-10x+25}+\dfrac{1}{25-x^2}=\dfrac{1}{x+5}$.

7. $\dfrac{2x-2}{2x^2-9x+10}=\dfrac{x-1}{4x^2-16x+15}$.

8. $\dfrac{9}{8x^3+12x^2-18x-27}-\dfrac{1}{4x^2-12x+9}=\dfrac{2}{9-4x^2}$.

9. $\dfrac{2x+13}{2x-5}:\left(\dfrac{24}{2x^2+3x-20}+\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{3}{2x^2-13x+20}\right)=x+4$.

10. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

11. $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$.

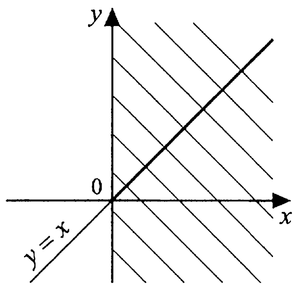
12. $\dfrac{x-4}{x^2+3x-10}+\dfrac{x}{x^2-3x-4}=\dfrac{2x-0,8}{x^2+x-20}$.

3

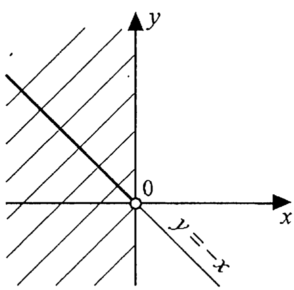
Уравнения, содержащие модуль

Определение 9. Модулем числа называется само число a, если оно положительно, и число $(-a)$, если оно отрицательно, т. е. $|a| = \begin{cases} a; \ a \geqslant 0 \\ -a; \ a < 0 \end{cases}$

Рассмотрим функцию $y = |x|$. Из определения модуля следует, что функция $y = |x|$ состоит из двух частей:

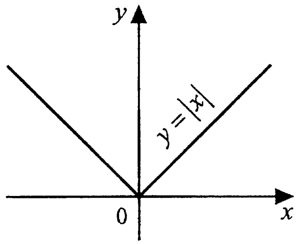


а) Пусть $x \geqslant 0$, тогда $y = x$.
При этом мы рассматриваем только ту часть прямой $y = x$, которая находится в правой полуплоскости.



б) Пусть $x < 0$. В этом случае $|x| = -x$, следовательно $y = -x$, и мы рассматриваем только часть графика $y = -x$, находящуюся в левой полуплоскости.

значит график $y=|x|$ выглядит так:



Из графика $y=|x|$ очевидны следующие свойства:

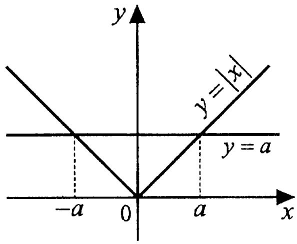
а) $|x|\geqslant 0$ для любых x;

б) $|x|=0$ только при $x=0$;

в) $|x|<0$ — решения нет, $x\notin\varnothing$.

Рассмотрим графическое решение уравнения $|x|=a$.

Чтобы было решение, необходимо чтобы $a\geqslant 0$. Построим графики $y=|x|$ и $y=a$ на одном чертеже. Очевидно, что при $a>0$ прямая $y=a$ пересекает график $y=|x|$ в двух точках с абсциссами $x=a$



и $x=-a$, т.е. из выражения $|x|=a$ следует, что $\left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-a \end{array}\right.$.

Пример 1. $|2x-3|=2$.

$$\left[\begin{array}{l} 2x-3=2 \\ 2x-3=-2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 2x=5 \\ 2x=1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=2{,}5 \\ x=0{,}5 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{0{,}5\,;2{,}5\}$.

Пример 2. $|6x^2-5x|=1$.

$$\left[\begin{array}{l} 6x^2-5x=1 \\ 6x^2-5x=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 6x^2-5x-1=0 \\ 6x^2-5x+1=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{6} \\ x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right\}$.

Пример 3. $\left|2x^2-1\right|=x$.

Здесь уже необходим другой подход, потому что в правой части неизвестный x.

Действительно, уравнение может иметь решение только если $x \geqslant 0$. Так как по свойству модуля $\left|2x^2-1\right| \geqslant 0$, то, возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left(\left|2x^2-1\right|\right)^2 = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left(2x^2-1\right)^2 = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-1=x \\ 2x^2-1=-x \end{array}\right. \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-1=0 \\ 2x^2+x-1=0 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \\ x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}, \text{ значит } \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Пример 4. $\dfrac{|x-2|-1}{2x-1}=2$.

Используя определение, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \ \left(|x-2| = x-2\right) \\ \dfrac{x-2-1}{2x-1}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0 \ \left(|x-2| = -(x-2)\right) \\ \dfrac{-(x-2)-1}{2x-1}=2 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2 \\ \dfrac{x-3}{2x-1}-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ \dfrac{-x+1}{2x-1}-2=0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 2\\ \dfrac{x-3-4x+2}{2x-1}=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ \dfrac{-x+1-4x+2}{2x-1}=0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 2\\ \dfrac{-3x-1}{2x-1}=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ \dfrac{-5x+3}{2x-1}=0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 2\\ x=-\dfrac{1}{3}\\ x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\varnothing\\ \begin{cases}x<2\\ x=\dfrac{3}{5}\\ x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.;\quad x=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{3}{5}\right\}$.

Подводя итоги, отметим:

1) $|a|=\begin{cases}a;\ a\geqslant 0\\ -a;\ a<0\end{cases}$;

2) $|a|\geqslant 0$, $\forall a$;

3) $|a|=0$, $a=0$;

4) $|a|<0$ — решения нет $a\in\varnothing$;

5) $|a|=|-a|$;

6) $|a|=b \Leftrightarrow \begin{cases}b\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.\end{cases}$.

Практикум 9

1. $|x-2|=3$.

2. $|x^2-5x|=6$.

3. $|x-4|=2x$.

4. $|x^2-2x-3|=x-3$.

5. $|x+3|=x^2+2x-3$.

6. $\dfrac{|x-3|-2}{x+2}=2$.

7. $||x+3|-1|=2$.

8. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6}=1$.

9. $\dfrac{x+3}{|x^2+5x+6|}=2$.

10. $\dfrac{|x+2|-4}{|x|-1}=3$.

11. $\dfrac{|x|-3}{|x^2-5x-6|}=1$.

12. $|x+2|+2|x-1|-|x+1|=3$.

Решение практикума 9

1. $|x-2|=3$. Используем свойство $|a|=b \Leftrightarrow \begin{cases} b\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. \end{cases}$:

Так как $3>0$, то $\left[\begin{array}{l} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1;5\}$.

2. $|x^2-5x|=6$. Действуем аналогично:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x=6 \\ x^2-5x=-6 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-5x-6=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-1;2;3;6\}$.

3. $|x-4|=2x$. По свойству $|a|=b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. \end{cases}$:

$$\begin{cases} 2x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-4=2x \\ x-4=-2x \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}; \quad x=1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{1\frac{1}{3}\right\}$.

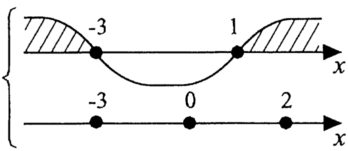
4. $|x^2-2x-3|=x-3$. Аналогично:

$$\begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=x-3 \\ x^2-2x-3=3-x \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=3 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases}; \quad x=3.$$

Ответ: $\{3\}$

5. $|x+3|=x^2+2x-3$. Аналогично:

$$\begin{cases} x^2+2x-3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+3=x^2+2x-3 \\ x+3=-x^2-2x+3 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} (x+3)(x-1) \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x-6=0 \\ x^2+3x=0 \end{array}\right. \end{cases}.$$



Ответ: $\{-3;2\}$.

6. $\dfrac{|x-3|-2}{x+2}=2$. По определению $|a|=\begin{cases} a; & a \geqslant 0 \\ -a; & a<0 \end{cases}$, тогда:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\geqslant 0\ \left(|x-3|=x-3\right)\\ \dfrac{x-3-2}{x+2}=2\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0\ \left(|x-3|=3-x\right)\\ \dfrac{3-x-2}{x+2}=2\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 3\\ x-5=2x+4\\ x\neq -2\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ 1-x=2x+4\\ x\neq -2\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 3\\ x=-9\quad\varnothing\\ x\neq -2\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ x=-1\\ x\neq -2\end{cases}\end{array}\right.;\quad x=-1.$$

Ответ: $\{-1\}$.

7. $\big||x+3|-1\big|=2$; $\left[\begin{array}{l}|x+3|-1=2\\ |x+3|-1=-2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}|x+3|=3\\ |x+3|=-1\ (\varnothing)\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x+3=3\\ x+3=-3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-6\end{array}\right.$.

Ответ: $\{-6\,;0\}$.

8. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6}=1$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3\geqslant 0\ \left(|x+3|=x+3\right)\\ \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+3<0\ \left(|x+3|=-x-3\right)\\ \dfrac{-(x+3)}{x^2+5x+6}=1\end{cases}\end{array}\right.$;

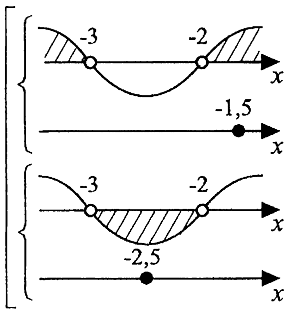
учтем, что $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ \dfrac{1}{x+2}=1\end{cases}\\ \begin{cases}x<-3\\ \dfrac{-1}{x+2}=1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ 1=x+2\\ x\neq -2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-3\\ -1=x+2\\ x\neq -2\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\ x=-1\\ x\neq -2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-3\\ x=-3\quad\varnothing\\ x\neq -2\end{cases}\end{array}\right.;\quad x=-1.$$

Ответ: $x=-1$.

9. $$\frac{x+3}{|x^2+5x+6|}=2;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+5x+6>0\ \left(|x^2+5x+6|=x^2+5x+6\right)\\ \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}=2\end{cases}\\ \begin{cases} x^2+5x+6<0\ \left(|x^2+5x+6|=-x^2-5x-6\right)\\ \dfrac{x+3}{-\left(x^2+5x+6\right)}=2\end{cases}\end{array}\right.;$$

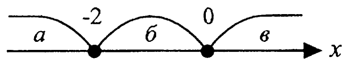
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+3)(x+2)>0\\ \dfrac{1}{x+2}=2\end{cases}\\ \begin{cases}(x+3)(x+2)<0\\ \dfrac{-1}{x+2}=2\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+3)(x+2)>0\\ x=-1{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}(x+3)(x+2)<0\\ x=-2{,}5\end{cases}\end{array}\right.;$$



Ответ: $\{-2{,}5;-1{,}5\}$.

10. $\dfrac{|x+2|-4}{|x|-1}=3$.

Разобьем числовую ось корнями (нулями) модулей $|x+2|=0$ и $|x|=0$ на три промежутка и на каждом отдельно решим уравнение:



а) $$\begin{cases} x<-2\ \left(\begin{array}{ll}x+2<0; & |x+2|=-x-2\\ x<0; & |x|=-x\end{array}\right)\\ \dfrac{-x-2-4}{-x-1}=3\end{cases};\quad \begin{cases}x<-2\\ -x-6=-3x-3;\\ x\neq-1\end{cases}\quad \begin{cases}x<-2\\ x=1{,}5\\ x\neq-1\end{cases}\ \varnothing$$

б) $$\begin{cases} x\geqslant-2\\ x<0\end{cases}\ \left(\begin{array}{ll}x+2\geqslant0; & |x+2|=x+2\\ x<0; & |x|=-x\end{array}\right)\ \ \dfrac{x+2-4}{-x-1}=3;\quad \begin{cases}x\geqslant-2\\ x<0\\ x-2=-3x-3\\ x\neq-1\end{cases};\quad \begin{cases}x\geqslant-2\\ x<0\\ x=-0{,}25\\ x\neq-1\end{cases};$$

$x=-0{,}25$.

в) $\begin{cases} x \geqslant 0 & \begin{pmatrix} x+2 \geqslant 0; & |x+2| = x+2 \\ x \geqslant 0; & |x| = x \end{pmatrix} \\ \dfrac{x+2-4}{x-1} = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x-2 = 3x-3 \\ x \neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = 0{,}5 \\ x \neq 1 \end{cases}$;

$x = 0{,}5$.

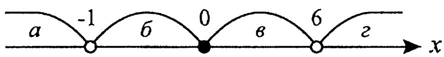
Ответ: $\{-0{,}25;\ 0{,}5\}$.

11. $\dfrac{|x|-3}{|x^2-5x-6|} = 1$.

Разобьем числовую ось корнями (нулями) модулей на четыре части:

$|x| = 0$; $x = 0$.

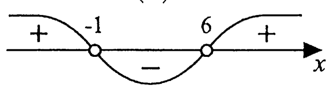
$|x^2-5x-6| = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -1 \end{array}\right.$.



На каждом участке решим преобразованное уравнение, раскрыв модули:

а) $\begin{cases} x < -1 & \begin{pmatrix} |x| = -x \\ |x^2-5x-6| = x^2-5x-6 \end{pmatrix} \\ \dfrac{-x-3}{x^2-5x-6} = 1 \end{cases}$

При этом, учитывая, что $t(x) = x^2-5x-6$ имеет знаки $(t(x) \neq 0)$:



$\begin{cases} x < -1 \\ x^2-4x-3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x < -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{7} \\ x = 2-\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$ $\varnothing$

б) $\begin{cases} 0>x>-1 \quad \begin{pmatrix} |x|=-x \\ |x^2-5x-6|=-x^2+5x+6 \end{pmatrix} \\ \dfrac{-x-3}{-x^2+5x+6}=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 0>x>-1 \\ x^2-6x-9=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 0>x>-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=3+3\sqrt{2} \\ x=3-3\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}$ $\varnothing$.

в) $\begin{cases} 6>x\geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} |x|=x \\ |x^2-5x-6|=-x^2+5x+6 \end{pmatrix} \\ \dfrac{x-3}{-x^2+5x+6}=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 6>x\geqslant 0 \\ x^2-4x-9=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 6>x\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{13} \\ x=2-\sqrt{13} \end{array}\right. \end{cases}$; $\quad x=2+\sqrt{13}$.

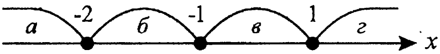
г) $\begin{cases} x>6 \quad \begin{pmatrix} |x|=x \\ |x^2-5x-6|=x^2-5x-6 \end{pmatrix} \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x-6}=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>6 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>6 \\ \left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=3-2\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases}$ $\quad x=3+2\sqrt{3}$.

Ответ: $\left\{2+\sqrt{13}\,; 3+2\sqrt{3}\right\}$.

12. $|x+2|+2|x-1|-|x+1|=3$.

Разобьем корнями (нулями) подмодульных выражений числовую ось на промежутки и на каждом промежутке решим преобразованное уравнение, предварительно раскрыв модули. Затем объединим все ответы.



а) $\begin{cases} x<-2 & \begin{pmatrix} |x+2|=-x-2 \\ |x-1|=-x+1 \\ |x+1|=-x-1 \end{pmatrix} \\ -x-2-2x+2+x+1=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x<-2 \\ -2x=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x<-2 \\ x=-1 \end{cases}$ $\varnothing$.

б) $\begin{cases} -1>x\geqslant-2 & \begin{pmatrix} |x+2|=x+2 \\ |x-1|=-x+1 \\ |x+1|=-x-1 \end{pmatrix} \\ x+2-2x+2+x+1=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 1>x\geqslant-2 \\ 5=3 \end{cases}$; $\varnothing$.

в) $\begin{cases} 1>x\geqslant-1 & \begin{pmatrix} |x+2|=x+2 \\ |x-1|=1-x \\ |x+1|=x+1 \end{pmatrix} \\ x+2-2x+2-x-1=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 1>x\geqslant-1 \\ -2x=0 \end{cases}$; $x=0$.

г) $\begin{cases} x\geqslant1 & \begin{pmatrix} |x+2|=x+2 \\ |x-1|=x-1 \\ |x+1|=x+1 \end{pmatrix} \\ x+2+2x-2-x-1=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geqslant1 \\ 2x=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geqslant1 \\ x=2 \end{cases}$; $x=2$.

Ответ: $\{\,0;2\,\}$.

Тренировочная работа 7

Решите уравнения:

1. $|3x-2|=1$.

2. $|x^2+5x|=6$.

3. $|x^2-2|=x$.

4. $\left|\dfrac{x-3}{x^2+2x-3}\right|=1$.

5. $\dfrac{x^2+5|x|+6}{x^2-9}=2$.

6. $|x+1|=x^2-2x-3$.

7. $\dfrac{|x-3|-1}{x+2}=1$.

8. $\big||x+4|-2\big|=1$.

9. $\dfrac{x^2-9}{|x^2-5x+6|}=1$.

10. $\dfrac{|x+2|-4}{|x|-1}=2$.

11. $\dfrac{|x^2+5x+6|}{|x|-3}=1$.

12. $|x-2|-2|x+1|+|2x+5|=3$.

Решение тренировочной работы 7

1. $|3x-2|=1$; $\left[\begin{array}{l}3x-2=1\\3x-2=-1\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}3x=1+2\\3x=-1+2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$; .

Ответ: $\left\{\frac{1}{3};1\right\}$.

2. $|x^2+5x|=6$; $\left[\begin{array}{l}x^2+5x=6\\x^2+5x=-6\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x^2+5x-6=0\\x^2+5x+6=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=-6\\x=1\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$; .

Ответ: $\{-6;-3;-2;1\}$.

3. $|x^2-2|=x$; $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-2=x\\x^2-2=-x\end{array}\right.\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\x^2+x-2=0\end{array}\right.\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\\x=-2\\x=1\end{array}\right.\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Ответ: $\{1;2\}$.

4. $\left|\frac{x-3}{x^2+2x-3}\right|=1$; $\left[\begin{array}{l}\frac{x-3}{x^2+2x-3}=1\\\frac{x-3}{x^2+2x-3}=-1\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x-3=x^2+2x-3\\x-3=-x^2-2x+3\end{array}\right.\\x\neq-3\\x\neq1\end{array}\right.$;

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+x=0\\x^2+3x-6=0\end{array}\right.\\x\neq-3\\x\neq1\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\\x=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.\\x\neq-3\\x\neq1\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\\x=\frac{-3-\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-\frac{3+\sqrt{33}}{2};-1;0;\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right\}$.

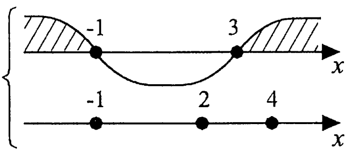
5. $\dfrac{x^2+5|x|+6}{x^2-9}=2$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geqslant 0 \ \ (|x|=x) \\ \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \ \ (|x|=-x) \\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=2 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geqslant 0 \\ \dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=2 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geqslant 0 \\ \dfrac{x+2}{x-3}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x-2}{x+3}=2 \end{cases}\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x+2=2(x-3) \\ x\neq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x-2=2(x+3) \\ x\neq -3 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x+2=2x-6 \\ x\neq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x-2=2x+6 \\ x\neq -3 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x=-8 \end{cases}\end{array}\right.$.

Ответ: $\{-8;8\}$.

6. $|x+1|=x^2-2x-3$; $\begin{cases} x^2-2x-3\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+1=x^2-2x-3 \\ x+1=-x^2+2x+3 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-2x-3\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right. \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2-2x-3\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}$;



.

Ответ: $\{-1;4\}$.

7. $\dfrac{|x-3|-1}{x+2}=1$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3\geqslant 0 \ \ (|x-3|=x-3) \\ \dfrac{x-3-1}{x+2}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3<0 \ \ (|x-3|=3-x) \\ \dfrac{3-x-1}{x+2}=1 \end{cases}\end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 3\\ x-4=x+2\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ 2-x=x+2\\ x\neq -2\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 3\\ -4=2\end{cases}\ \varnothing\\ \begin{cases}x<3\\ x=0\\ x\neq -2\end{cases}\end{array}\right.;\quad x=0.$$

Ответ: $x=0$.

8. $\left||x+4|-2\right|=1$; $\left[\begin{array}{l}|x+4|-2=1\\ |x+4|-2=-1\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}|x+4|=3\\ |x+4|=1\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x+4=3\\ x+4=-3\\ x+4=1\\ x+4=-1\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-7\\ x=-3\\ x=-5\end{array}\right.$.

Ответ: $\{-7;-5;-3;-1\}$.

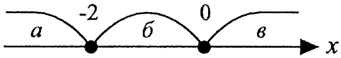
9. $\dfrac{x^2-9}{|x^2-5x+6|}=1$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x+6>0\ \left(|x^2-5x+6|=x^2-5x+6\right)\\ \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-5x+6<0\ \left(|x^2-5x+6|=-x^2+5x-6\right)\\ \dfrac{x^2-9}{-(x^2-5x+6)}=1\end{cases}\end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-2)(x-3)>0\\ \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=1\end{cases}\\ \begin{cases}(x-2)(x-3)<0\\ \dfrac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)(x-2)}=1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-2)(x-3)>0\\ x+3=x-2\end{cases}\\ \begin{cases}(x-2)(x-3)<0\\ x+3=2-x\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-2)(x-3)>0\\ 3=-2\end{cases}\ \varnothing\\ \begin{cases}(x-2)(x-3)<0\\ x=-0{,}5\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\begin{cases}(-0{,}5-2)(-0{,}5-3)<0\\ x=-0{,}5\end{cases};\quad x\in\varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

10. $\dfrac{|x+2|-4}{|x|-1}=2$. Найдем корни модулей $|x+2|=0$ и $|x|=0$:



Корни (нули) разделят числовую ось на три интервала, на каждом из которых рассмотрим уравнение:

а) $\begin{cases} x+2<0 \quad \begin{pmatrix} |x+2|=-(x+2) \\ |x|=-x \end{pmatrix} \\ \dfrac{-x-2-4}{-x-1}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2<0 \\ \dfrac{x+6}{x+1}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2<0 \\ x+6=2x+2 \end{cases}$;

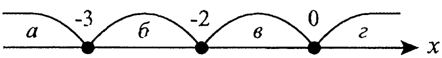
$\begin{cases} x<-2 \\ x=4 \end{cases}$ $\varnothing$.

б) $\begin{cases} 0>x\geqslant -2 \quad \begin{pmatrix} |x+2|=x+2 \\ |x|=-x \end{pmatrix} \\ \dfrac{x+2-4}{-x-1}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 0>x\geqslant -2 \\ x-2=-2x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 0>x\geqslant -2 \\ x=0 \end{cases}$ $\varnothing$

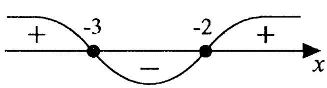
в) $\begin{cases} x\geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} |x+2|=x+2 \\ |x|=x \end{pmatrix} \\ \dfrac{x+2-4}{x-1}=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x-2=2x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x=0 \end{cases}$; $x=0$.

Ответ: $\{0\}$.

11. $\dfrac{|x^2+5x+6|}{|x|-3}=1$. $|x^2+5x+6|=0$, $|x|=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.



$y=x^2+5x+6$



а) $\begin{cases} x<-3 & \left(\begin{array}{l} x^2+5x+6>0;\ \left|x^2+5x+6\right|=x^2+5x+6 \\ x<0;\ |x|=-x \end{array}\right) \\ \dfrac{x^2+5x+6}{-x-3}=1 \end{cases};$

$\begin{cases} x<-3 \\ \dfrac{(x+3)(x+2)}{-(x+3)}=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x<-3 \\ -(x+2)=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x<-3 \\ x=-3 \end{cases}\quad \varnothing.$

б) $\begin{cases} -3\leqslant x<-2 & \left(\begin{array}{l} x^2+5x+6\leqslant 0;\ \left|x^2+5x+6\right|=-x^2-5x-6 \\ x<0;\ |x|=-x \end{array}\right) \\ \dfrac{-\left(x^2+5x+6\right)}{-x-3}=1 \end{cases};$

$\begin{cases} -3\leqslant x<-2 \\ \dfrac{(x+2)(x+3)}{x+3}=1 \end{cases};\quad \begin{cases} -3\leqslant x<-2 \\ x+2=1 \end{cases};\quad \begin{cases} -3\leqslant x<-2 \\ x=-1 \end{cases}\quad \varnothing.$

в) $\begin{cases} -2\leqslant x<0 & \left(\begin{array}{l} x^2+5x+6\geqslant 0;\ \left|x^2+5x+6\right|=x^2+5x+6 \\ x<0;\ |x|=-x \end{array}\right) \\ \dfrac{x^2+5x+6}{-x-3}=1 \end{cases};$

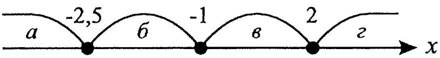
$\begin{cases} -2\leqslant x<0 \\ -(x+2)=1 \end{cases};\quad \begin{cases} -2\leqslant x<0 \\ x=-3 \end{cases}\quad \varnothing.$

г) $\begin{cases} x\geqslant 0 & \left(\begin{array}{l} x^2+5x+6>0;\ \left|x^2+5x+6\right|=x^2+5x+6 \\ x\geqslant 0;\ |x|=x \end{array}\right) \\ \dfrac{x^2+5x+6}{x-3}=1 \end{cases};$

$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2+5x+6=x-3 \\ x\neq 3 \end{cases};\quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2+4x+9=0 \end{cases}\quad D<0\quad \varnothing.$

Ответ: $\varnothing$.

12. $|x-2|-2|x+1|+|2x+5|=3$; $\left[\begin{array}{l}|x-2|=0\\|x+1|=0\\|2x+5|=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\\x=-2{,}5\end{array}\right.$;



а) $\begin{cases}x<-2{,}5 & \left(\begin{array}{l}2x+5<0;\ |2x+5|=-2x-5\\x+1<0;\ |x+1|=-x-1\\x-2<0;\ |x-2|=2-x\end{array}\right)\\2-x+2x+2-2x-5=3\end{cases}$; $\begin{cases}x<-2{,}5\\-x=4\end{cases}$;

$\begin{cases}x<-2{,}5\\x=-4\end{cases}$; $x=-4$.

б) $\begin{cases}-2{,}5\leqslant x<-1 & \left(\begin{array}{l}|2x+5|=2x+5\\|x+1|=-x-1\\|x-2|=2-x\end{array}\right)\\2-x+2x+2+2x+5=3\end{cases}$; $\begin{cases}-2{,}5\leqslant x<-1\\3x=-6\end{cases}$;

$\begin{cases}-2{,}5\leqslant x<-1\\x=-2\end{cases}$; $x=-2$.

в) $\begin{cases}-1\leqslant x<2 & \left(\begin{array}{l}|2x+5|=2x+5\\|x+1|=x+1\\|x-2|=2-x\end{array}\right)\\2-x-2x-2+2x+5=3\end{cases}$; $\begin{cases}-1\leqslant x<2\\x=2\end{cases}$ $\varnothing$.

г) $\begin{cases}x\geqslant 2 & \left(\begin{array}{l}|2x+5|=2x+5\\|x+1|=x+1\\|x-2|=x-2\end{array}\right)\\x-2-2x-2+2x+5=3\end{cases}$; $\begin{cases}x\geqslant 2\\x=2\end{cases}$; $x=2$.

Ответ: $\{-4;-2;\ 2\}$.

Проверочная работа 5

Решите уравнения:

1. $|3x+2|=1$.

2. $|x^2-3|=2x$.

3. $\left|\dfrac{x-4}{x^2+3x-4}\right|=1$.

4. $\dfrac{x^2-5|x|+6}{x^2-9}=2$.

5. $|x+1|=x^2-3x-4$.

6. $\dfrac{|x+3|-2}{|x|-2}=1$.

7. $||x-5|-3|=2x$.

8. $\dfrac{|x^2-5x+6|}{|x|-2}=1$.

9. $||x^2-5x|-6|=x^2-2x-3$.

10. $|x^2+3x|=|9-x^2|+2$.

11. $\left||x-1|-\dfrac{6}{x}\right|=x+2$.

12. $\left||x+1|-\dfrac{6}{x}\right|=2-x$.

Метод подстановки

Практикум 10

1. $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$.

Положим $x^2 = t \quad (t \geq 0)$;

$t^2 + 7t - 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -8 \notin [0; \infty) \end{array}\right.$; $x^2 = 1$; $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{1; -1\}$.

Примечание. Такие уравнения называют **биквадратными**.

2. $\left(x^2 - x\right)^2 - 8\left(x^2 - x\right) + 12 = 0$.

Положим: $x^2 - x = t$. Тогда уравнение примет вид обычного квадратного уравнения.

$t^2 - 8t + 12 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = 2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 6 \\ x^2 - x = 2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right.$

3. $\left(x^2+5x+2\right)\left(x^2+5x-1\right)=28$.

Пусть $x^2+5x+2=t$, тогда $x^2+5x-1=t-3$.

Уравнение примет вид:

$t(t-3)=28$; $\quad t^2-3t-28=0$.

$$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=-4 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+5x+2=7 \\ x^2+5x+2=-4 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+5x-5=0 \\ x^2+5x+6=0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-5-3\sqrt{5}}{2} \\ x=-3 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\frac{5+3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-5+3\sqrt{5}}{2};\ -3;\ -2\right\}$.

4. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{2}{x}\right)-3=0$.

Положим $x+\frac{2}{x}=t$, тогда $t^2+2t-3=0$.

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=1 \\ x+\dfrac{2}{x}=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{lll} x^2-x+2=0; & D<0; & x\in\varnothing; \\ x^2+3x+2=0; & x_1=-1; & x_2=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2;-1\}$.

5. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9=0$.

Положим $t=x+\frac{1}{x}$, тогда $t^2=x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$,

т. е. $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$,

значит $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

Уравнение примет вид

$7t-2\left(t^2-2\right)-9=0$; $2t^2-7t+5=0$;

$t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\frac{7\pm3}{4}$;

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{5}{2}; \\ t=1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}; \\ x+\frac{1}{x}=1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll} 2x^2-5x+2=0; & x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2}; \\ x^2-x+1=0; & D<0;\ x\in\varnothing. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$.

6. $\left(x^2-x+1\right)^2-10(x-4)(x+3)-109=0$.

$\left(x^2-x+1\right)^2-10\left(x^2-x-12\right)-109=0$.

Положим $x^2-x+1=t$; $x^2-x-12=t-13$.

Уравнение примет вид:

$t^2-10(t-13)-109=0$; $t^2-10t+21=0$; $\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} x^2-x+1=7 \\ x^2-x+1=3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2-x-6=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-2;-1;\ 2;\ 3\}$.

7. $2\left(x^2-6\right)-\frac{3}{x^2-6}=5$.

Пусть $x^2-6=t$,

тогда $2t-\frac{3}{t}=5\quad(t\neq0)$;

$2t^2-5t-3=0$; $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm7}{4}$;

$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-6=3 \\ x^2-6=-\frac{1}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2=9 \\ x^2=5{,}5 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \\ x=\sqrt{5{,}5} \\ x=-\sqrt{5{,}5} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-3;\,3;\,-\sqrt{5{,}5};\,\sqrt{5{,}5}\right\}$.

8. $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{1}{x^2-2x+3}=\dfrac{9}{2\left(x^2-2x+4\right)}$.

Пусть $x^2-2x+2=t$,

тогда $x^2-2x+3=t+1$; $\quad x^2-2x+4=t+2$.

Уравнение примет вид:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=\frac{9}{2(t+2)};\qquad D(У):\quad \begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq -1 \\ t\neq -2 \end{cases}.$$

$$2(t+2)(t+1)+2t(t+2)=9t(t+1);$$

$$2\left(t^2+3t+2\right)+2t^2+4t=9t^2+9t;\quad 5t^2-t-4=0.$$

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{10}=\frac{1\pm 9}{10};\quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{4}{5} \end{array}\right. \in D(У);$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x+2=1 \\ x^2-2x+2=-\frac{4}{5} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=0 \\ 5x^2-10x+14=0;\ D<0;\ x\in\varnothing \end{array}\right.$$

тогда $(x-1)^2=0$; $\quad x=1$.

Ответ: $x=1$.

9. $\left(2x^2+3x+1\right)\left(2x^2-5x+1\right)=9x^2$.

Так как $x=0$ корнем уравнения не является,

то разделим обе части уравнения на x^2:

$\frac{2x^2+3x+1}{x}\cdot\frac{2x^2-5x+1}{x}=9$; $\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)\left(2x-5+\frac{1}{x}\right)=9$;

положим $2x+\frac{1}{x}+3=t$, тогда $2x+\frac{1}{x}-5=t-8$ уравнение примет вид: $t(t-8)=9$; $t^2-8t-9=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{1}{x}+3=9 \\ 2x+\frac{1}{x}+3=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\frac{2+\sqrt{2}}{2};\frac{3-\sqrt{7}}{2};\frac{-2+\sqrt{2}}{2};\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right\}$.

10. $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1$. $D(У):\begin{cases} x\neq-6 \\ x\neq-3 \\ x\neq-2 \\ x\neq1 \end{cases}$.

Можно решать стандартным способом, тогда мы получим уравнение четвертой степени, которое решать достаточно трудно. Попробуем поступить иначе:

Так как $(x+6)(x-1)=x^2+5x-6$, а $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$,

положим $x^2+5x+6=t$, тогда $x^2+5x-6=t-12$

и уравнение примет вид: $\frac{16}{t-12}-\frac{20}{t}=1$ $(t\neq0;t\neq12)$

$16t-20(t-12)=t^2-12t$; $t^2-8t-240=0$; $\left[\begin{array}{l} t=20 \\ t=-12 \end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+6=20 \\ x^2+5x+6=-12 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2+5x-14=0 \\ x^2+5x+18=0,\ D<0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2 \end{array}\right.\in D(У).$$

Ответ: $\{-7;2\}$.

11. $6\left(\dfrac{x^4+81}{9x^2}\right)-7\left(\dfrac{x^2-9}{3x}\right)=36.$

Так как $\dfrac{x^2-9}{3x}=\dfrac{x^2}{3x}-\dfrac{9}{3x}=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}$, положим $\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}=t$, тогда:

$\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)^2=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{9}{x^2}-2\cdot\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{3}{x}=\dfrac{x^4+81}{9x^2}-2=t^2$, значит $\dfrac{x^4+81}{9x^2}=t^2+2$.

Уравнение относительно t примет следующий вид:

$6\left(t^2+2\right)-7t=36$; $6t^2-7t-24=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{8}{3} \\ t=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$, значит $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2-8x-9=0 \\ 2x^2+9x-18=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-1 \\ x=-6 \\ x=1,5 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-6;-1;1,5;9\}$.

12. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

Так как $x=\pm2$ и $x=\pm1$ корнями не являются, то домножим обе части уравнения на $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$:

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}+48=0;$$

$$20\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}-5\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-2)}+48=0.$$

Положим $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=t$,

тогда $20t-\dfrac{5}{t}+48=0$;

$20t^2+48t-5=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{-24\pm\sqrt{576+100}}{20}=\dfrac{-24\pm26}{20}$; $\left[\begin{array}{l} t=0,1 \\ t=-2,5 \end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{10}\\[2ex] \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}10\left(x^2-3x+2\right)=x^2+3x+2\\ 2\left(x^2-3x+2\right)=-5\left(x^2+3x+2\right)\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}9x^2-33x+18=0\\ 7x^2+9x+14=0\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}3x^2-11x+6=0\\ 7x^2+9x+14=0\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-72}}{6}\\[2ex] x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{81-392}}{14}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{2}{3}\\ \varnothing\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{2}{3};\,3\right\}$.

Тренировочная работа 8

Решите уравнения:

1. $x^4-5x^2+4=0$.

2. $\left(x^2+x\right)^2-6\left(x^2+x\right)+8=0$.

3. $\left(x^2-5x+2\right)\left(x^2-5x-1\right)=10$.

4. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{2}{x}\right)=3$.

5. $3\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{2}{x}\right)=13$.

6. $\left(x^2+5x+7\right)^2-(x+2)(x+3)=1$.

7. $2\left(x^2+2x\right)-\frac{3}{x^2+2x}=5$.

8. $\frac{1}{x^2+3x+3}-\frac{9}{2\left(x^2+3x+4\right)}+\frac{1}{x^2+3x+2}=0$.

9. $\frac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\frac{15x-10}{2x^2-5x+4}=6$.

10. $\frac{1}{x-3+\frac{8}{x}}-\frac{1}{x+2+\frac{8}{x}}=\frac{5}{24}$.

11. $x^4-25x^2+60x-36=0$.

12. $x^3-7x^2-21x+27=0$.

13. $\frac{6}{(x-1)(x-2)}+\frac{8}{(x+1)(x-4)}=1$.

14. $\left(x^2+x+1\right)^4-10x^2\left(x^2+x+1\right)^2+9x^4=0$.

Решение тренировочной работы 8

1. $x^4-5x^2+4=0$.

$x^2=t\ (t\geqslant 0)$; $t^2-5t+4=0$.

$$\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-2;-1;1;2\}$.

2. $\left(x^2+x\right)^2-6\left(x^2+x\right)+8=0$.

Пусть $x^2+x=t$, тогда $t^2-6t+8=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2+x=4 \\ x^2+x=2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2+x-4=0 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right.;$$

а) $x^2+x-4=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$;

б) $x^2+x-2=0$; $x_3=-2$; $x_4=1$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2};-2;1\right\}$.

3. $\left(x^2-5x+2\right)\left(x^2-5x-1\right)=10$.

Полагая, что $x^2-5x+2=t$, тогда $x^2-5x-1=t-3$.

$t(t-3)=10$; $t^2-3t-10=0$.

$$\left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-5x+2=5 \\ x^2-5x+2=-2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-5x-3=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right.;$$

а) $x^2-5x-3=0$; $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+12}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$;

б) $x^2-5x+4=0$; $x_3=4$; $x_4=1$.

Ответ: $\left\{\dfrac{5-\sqrt{37}}{2};\dfrac{5+\sqrt{37}}{2};1;4\right\}$.

4. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{2}{x}\right)=3$.

Пусть $x-\frac{2}{x}=t$, тогда $t^2-2t-3=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x-\frac{2}{x}=3 \\ x-\frac{2}{x}=-1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2-3x-2=0 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right.$;

а) $x^2-3x-2=0$; $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$;

б) $x^2+x-2=0$ $x_3=-2$ $x_4=1$

Ответ: $\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2};-2;1\right\}$.

5. $3\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{2}{x}\right)=13$.

Пусть $x-\frac{2}{x}=t$, тогда $x^2-2x\cdot\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=t^2$,

значит $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$.

Тогда уравнение примет вид

$3\left(t^2+4\right)-2t=13$;

$3t^2-2t-1=0$;

$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3}=\frac{1\pm2}{3}$; $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$;

а) $x-\frac{2}{x}=1$; $x^2-x-2=0$; $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$;

б) $x-\frac{2}{x}=-\frac{1}{3}$; $3x^2+x-6=0$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+72}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{73}}{6}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1+\sqrt{73}}{6};\frac{-1+\sqrt{73}}{6};-1;2\right\}$.

6. $\left(x^2+5x+7\right)^2-(x+2)(x+3)=1$.

Преобразуем уравнение.

$\left(x^2+5x+7\right)^2-\left(x^2+5x+6\right)-1=0$.

Тогда пусть $x^2+5x+7=t$, значит $x^2+5x+6=t-1$. Уравнение приобретает более простой вид.

$t^2-(t-1)-1=0$;

$t^2-t=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+5x+7=0;\ D<0 \\ x^2+5x+7=1 \end{array}\right.$;

$x^2+5x+6=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-3;-2\}$.

7. $2\left(x^2+2x\right)-\dfrac{3}{x^2+2x}=5$.

Пусть $x^2+2x=t$ $(t\neq 0)$.

Тогда $2t-\dfrac{3}{t}=5$; $2t^2-5t-3=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\dfrac{5\pm 7}{4}$; $\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \in D(y)$; $\left[\begin{array}{l} x^2+2x=3 \\ x^2+2x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ 2x^2+4x+1=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$;

Ответ: $\left\{-3;1;-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}\right\}$.

8. $\dfrac{1}{x^2+3x+3}-\dfrac{9}{2\left(x^2+3x+4\right)}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}=0$.

Пусть $x^2+3x+2=t$,

тогда $x^2+3x+3=t+1$; $\quad x^2+3x+4=t+2$.

После подстановки уравнение примет более простой вид.

$$\frac{1}{t+1}-\frac{9}{2(t+2)}+\frac{1}{t}=0; \quad D(У): \begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq -1; \\ t\neq -2 \end{cases}$$

$$2t(t+2)-9t^2-9t+2t^2+6t+4=0; \quad -5t^2+t+4=0;$$

$$5t^2-t-4=0; \quad t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{10}=\frac{1\pm 9}{10}; \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{4}{5} \end{array}\right. \in D(У);$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x+2=1 \\ x^2+3x+2=-\dfrac{4}{5} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+3x+1=0 \\ 5x^2+15x+14=0;\ D<0 \end{array}\right..$$

$$x^2+3x+1=0; \quad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

9. $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\dfrac{15x-10}{2x^2-5x+4}=6$.

Преобразуем уравнение.

$$\frac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\frac{5(3x-2)}{2x^2-5x+4}=6.$$

Теперь понятно, что если положить $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2}=t$,

то упростим вид уравнения. $\quad D(У)$: $\quad t\neq 0$;

$t+\dfrac{5}{t}=6$, тогда $t^2-6t+5=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5 \end{array}\right.$;

а) $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2}=1$.

$2x^2-5x+4=3x-2$; $\quad 2x^2-8x+6=0$;

$x^2-4x+3=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$;

б) $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2}=5$;

$2x^2-5x+4=15x-10$; $2x^2-20x+14=0$; $x^2-10x+7=0$;

$x_{1,2}=5\pm\sqrt{25-7}=5\pm\sqrt{18}=5\pm3\sqrt{2}$.

Очевидно, что $2x^2-5x+4\neq0$; $(D<0)$

$3x-2=0 \quad x=\dfrac{2}{3}$, значит $D(У) \quad x\neq\dfrac{2}{3}$.

Все корни подходят.

Ответ: $\left\{5-3\sqrt{2}\,;\ 5+3\sqrt{2};\ 1;\ 3\right\}$.

10. $\dfrac{1}{x-3+\frac{8}{x}}-\dfrac{1}{x+2+\frac{8}{x}}=\dfrac{5}{24}$.

Пусть $x+\dfrac{8}{x}+2=t$; $\quad x+\dfrac{8}{x}-3=t-5$.

После подстановки уравнение приобретет более простой вид.

$\dfrac{1}{t-5}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{24}$; $\qquad D(У)$: $\left\{\begin{array}{l} t\neq5 \\ t\neq0 \end{array}\right.$;

$24t-24(t-5)=5t(t-5)$; $\quad 5t^2-25t-120=0$;

$t^2-5t-24=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t=8 \\ t=-3 \end{array}\right. \in D(У)$;

а) $x+\dfrac{8}{x}+2=8$; $\quad x^2-6x+8=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right. \quad (x\neq0)$;

б) $x+\dfrac{8}{x}+2=-3$; $\quad x^2+5x+8=0$; $\quad D<0$.

Ответ: $\{2\,;4\}$.

Такого вида уравнение может быть более завуалированным, например:

$$\frac{x}{x^2-3x+8}-\frac{x}{x^2+2x+8}=\frac{5}{24}.$$

Необходимо увидеть, что можно вынести x в знаменателе и сократить, учитывая, что $x=0$ не является решением данного уравнения.

Общий вид такого уравнения

$$\frac{ax}{px^2+nx+g}+\frac{bx}{px^2+mx+g}=c, \text{ тогда } t=px+\frac{g}{x}.$$

11. $x^4-25x^2+60x-36=0$.

Здесь можно решить обычным разложением на множители.

$x^4-\left(25x^2-60x+36\right)=0$; $\left(x^2\right)^2-(5x-6)^2=0$,

тогда $\left(x^2+5x-6\right)\left(x^2-5x+6\right)=0$.

$$\left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=1 \\ x=3 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-6;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

12. $x^3-7x^2-21x+27=0$.

Аналогично можно решить и данное уравнение, зная, что $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$.

$\left(x^3+27\right)-\left(7x^2+21x\right)=0$; $(x+3)\left(x^2-3x+9\right)-7x(x+3)=0$;

$(x+3)\left(x^2-3x+9-7x\right)=0$; $(x+3)\left(x^2-10x+9\right)=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=9 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-3;\ 1;\ 9\}$.

13. $\dfrac{6}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{8}{(x+1)(x-4)}=1$.

$]x^2-3x+2=t$, тогда $x^2-3x-4=t-6$; $\dfrac{6}{t}+\dfrac{8}{t-6}=1$;

$6t-36+8t=t^2-6t$; $t^2-20t+36=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=18 \\ t=2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=18 \\ x^2-3x+2=2 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{73}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{73}}{2} \\ x=3 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{3-\sqrt{73}}{2};0;3;\dfrac{3+\sqrt{73}}{2}\right\}$.

14. $(x^2+x+1)^4-10x^2(x^2+x+1)^2+9x^4=0$; $(:x^4)$

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)^4-10\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)^2+9=0.$$

Пусть $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x}\right)^2=t$; $\left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=1 \end{array}\right.$.

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x+1}{x}=3 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x}=-3 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x}=1 \\ \dfrac{x^2+x+1}{x}=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=0 \\ x^2+4x+1=0 \\ x^2+2x+1=0 \\ x^2+1=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2+\sqrt{3} \\ x=-2-\sqrt{3} \\ x=-1 \\ \varnothing \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-1;-2-\sqrt{3};1;-2+\sqrt{3}\right\}$.

Применение теории делимости для решения уравнений

Практикум 11

1. $2x^2-3x-5=0$; $f(x)=2x^2-3x-5$;

$f(-1)=2(-1)^2-3(-1)-5=0$, значит

$f(x)\vdots(x+1)$ ($\vdots$ - символ кратности).

Разделим уголком:

а) $2x^2:(x)=2x$ - запишем под уголком.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-5 & \underline{x+1} \\ & 2x \end{array}$$

Умножим $2x$ на $(x+1)$.

б) $2x(x+1)=2x^2+2x$ - запишем под выражением $2x^2-3x-5$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-5 & \underline{x+1} \\ \underline{2x^2+2x} & 2x \end{array}$$

в) Вычтем $(2x^2-3x-5)-(2x^2+2x)=-5x-5$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-5 & \underline{x+1} \\ \underline{2x^2+2x} & 2x \\ \quad -5x-5 & \end{array}$$

г) $(-5x):x=-5$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-5 & \underline{\ x+1\ } \\ \underline{2x^2+2x} & 2x-5 \\ \quad -5x-5 & \end{array}$$

д) $-5\cdot(x+1)=-5x-5$. Подставим под $-5x-5$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-5 & \underline{x+1} \\ \underline{2x^2+2x} & 2x-5 \\ \quad -5x-5 & \\ \quad \underline{-5x-5} & \end{array}$$

е) $(-5x-5)-(-5x-5)=0$, значит остаток равен нулю.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-5 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^2+2x} & 2x-5 \\ \quad -5x-5 & \\ \quad \underline{-5x-5} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Процесс деления закончен. $\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 2x-5=0 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1;2,5\}$.

Если вы были внимательны, то деление происходит как с числами:

$$\begin{array}{l|l} 534 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{3} & 178 \\ 23 & \\ \underline{21} & \\ \ \ 24 & \\ \ \ \underline{24} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

2. $x^3+2x^2-1=0$.

$f(-1)=-1+2-1=0$.

а) $(x^3+2x^2)-(x^3+x^2)=x^2$;

б) $(x^2-1)-(x^2+x)=-x-1$.

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+\ \ x^2} & x^2+x-1 \\ \qquad x^2-1 & \\ \qquad \underline{x^2+x} & \\ \qquad\quad -x-1 & \\ \qquad\quad \underline{-x-1} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

т. е. $x^3+2x-1=(x+1)(x^2+x-1)$; $x^2+x-1=0$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{-1;-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3. $x^4+5x^2-6=0$.

$f(1)=1+5-6=0$; т. е. $\left(x^4+5x^2-6\right)\vdots(x-1)$.

Разделим.

$$\begin{array}{l|l}
x^4+5x^2-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-x^3} & x^3+x^2+6x+6 \\
\quad x^3+5x^2 & \\
\quad \underline{x^3-x^2} & \\
\qquad 6x^2-6 & \\
\qquad \underline{6x^2-6x} & \\
\qquad\quad 6x-6 & \\
\qquad\quad \underline{6x-6} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

а) $\left(x^4+5x-6\right)-\left(x^4-x^3\right)=x^3+5x^2-6$;

б) $\left(x^3+5x^2-6\right)-\left(x^3-x^2\right)=6x^2-6$;

в) $\left(6x^2-6\right)-\left(6x^2-6x\right)=6x-6$.

Пусть $\varphi(x)=x^3+x^2+6x+6$;

$\varphi(-1)=-1+1-6+6=0$;

т. е. $\varphi(x)\vdots(x+1)$.

Разделим уравнение.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2+6x+6 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+x^2\qquad\quad} & x^2+6 \\
\qquad 6x+6 & \\
\qquad \underline{6x+6} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
\quad ;\; x^2+6=0;\quad x\in\varnothing$$

$\left(x^3+x^2+6x+6\right)-\left(x^3+x^2\right)=6x+6$.

Ответ: $\{1;-1\}$.

Примечания.

Теорема 1. Если $x = a$ корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ и $a_0; a_1; a_2; \ldots a_n \in \mathbb{Z}$ – целые числа, то $f(x) \vdots (x - a)$ ($\vdots$ – символ кратности).

Теорема 2. Для приведенного уравнения с целыми коэффициентами $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n$, если $\varphi(k) = 0$, то

а) $\varphi(x) \vdots (x - k)$; б) $b_n \vdots k$,

где $k \in \mathbb{Z}$.

То есть, если есть целые корни, то они являются делителями свободного члена.

4. $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$. Если есть целые корни, то они являются делителями числа b, т. е. $d = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

$f(-1) \neq 0$;

$f(1) \neq 0$;

$f(-2) = -8 - 4 + 16 + 6 \neq 0$;

$f(2) = 8 - 4 - 16 + 6 \neq 0$;

$f(3) = 27 - 9 - 24 + 6 = 0$ (т. е. $f(x) \vdots (x - 3)$).

а) $(x^3 - x^2) - (x^3 - 3x^2) = 2x^2$;

б) $(2x^2 - 8x) - (2x^2 - 6x) = -2x$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 8x + 6 & x - 3 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2 \phantom{{}-8x+6}} & x^2 + 2x - 2 \\
2x^2 - 8x + 6 & \\
\underline{2x - 6x \phantom{{}+6}} & \\
-2x + 6 & \\
\underline{-2x + 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

$x^2 + 2x - 2 = 0$;

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 2}$.

Ответ: $\{3; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$.

5. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0;$

$d=\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm8;\pm12;\pm24$

$f(1)=1-10+35-50+24=0;$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-10x^3+35x^2-50x+24 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-\ \ x^3\qquad\qquad} & x^3-9x^2+26x-24 \\
\quad -9x^3+35x^2 & \\
\quad \underline{-9x^3+9x^2\qquad} & \\
\qquad\quad 26x^2-50x & \\
\qquad\quad \underline{26x^2-26x\quad} & \\
\qquad\qquad\quad -24x+24 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-24x+24} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\varphi(x)=x^3-9x^2+26x-24;$

$\varphi(1)\neq0;$

$\varphi(-1)\neq0;$

$\varphi(2)=8-36+52-24=0$, значит

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-9x^2+26x-24 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2\qquad\quad} & x^2-7x+12 \\
\quad -7x^2+26x & \\
\quad \underline{-7x^2+14x\quad} & \\
\qquad\quad 12x-24 & \\
\qquad\quad \underline{12x-24} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$x^2-7x+12=0$ можно уже решать обычным образом.

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{1;2;3;4\}$.

6. $2x^3+7x^2-28x+12=0$.

Здесь уже другая идея.

Теорема 3. Если для уравнения $f(x)=0$,

где $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ и $a_0;\, a_1;\, a_2;\ldots a_n\in\mathbb{Z}$.

$f\left(\dfrac{p}{g}\right)=0$ (т.е. $\dfrac{p}{g}$ – корень – рациональное число,

где $g\in N$, а $p\in\mathbb{Z}$ и $(p;g)=1$, что означает, что числа p и g взаимно просты, т.е. не имеют общих делителей, кроме единицы), то $a_0\,\vdots\, g$ и $a_n\,\vdots\, p$.

Тогда в уравнении $2x^3+7x^2-28x+12=0$

для p – возможны значения $\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12$,

для g – возможны значения 1; 2,

тогда корнями могут быть числа

$\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12;\pm\dfrac{1}{2}$ и т. д.

Подбором можно убедится, что $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Значит $f(x)\,\vdots\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

Разделим.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+7x^2-28x+12 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3-\ \ x^2} & 2x^2+8x-24 \\
\quad 8x^2-28x & \\
\quad \underline{8x^2\ \ -4x} & \\
\qquad -24x+12 & \\
\qquad \underline{-24x+12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Значит $2x^2+8x-24=0$, т.е. $x^2+4x-12=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-6\\ x=2\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-6\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,2\right\}$.

7. $\dfrac{1+9x+27x^2+27x^3}{9x^2+6x+1}-\dfrac{60x^3+293x^3-44x-45}{5+16x+3x^2}=10-17x$.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, может впоследствии это поможет сократить эти дроби или уж в крайнем случае, очень важно для нахождения общего знаменателя.

а) $1+9x+27x^2+27x^3=(1+3x)^3$;

б) $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$;

в) $3x^2+16x+5=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-15}}{3}=\frac{-8\pm 7}{3};\quad \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.;$$

$$3x^2+16x+5=3(x+5)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(x+5)(3x+1);$$

$$D(У):\quad \begin{cases} x\neq-\dfrac{1}{3} \\ x\neq-5 \end{cases}.$$

Интересно, делится ли $60x^3+293x^2-44x-45$ на $(x+5)$? Проверять $f(-5)$ – долго, попробуем «в лоб».

$$\begin{array}{l|l} 60x^3+293x^2-44x-45 & \;x+5 \\ \cline{2-2} \underline{60x^3+300x^2} & 60x^2-7x-9 \\ \qquad -7x^2-44x & \\ \qquad \underline{-7x^2-35x} & \\ \qquad\qquad -9x-45 & \\ \qquad\qquad \underline{-9x-45} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Теперь аналогично попробуем разделить в лоб.

$60x^2-7x-9$ на $3x+1$

$$\begin{array}{l|l} 60x^2 \;\; -7x-9 & \;3x+1 \\ \cline{2-2} \underline{60x^2+20x\quad} & 20x-9 \\ \qquad 27x-9 & \\ \qquad \underline{27x-9} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Значит если бы догадались разделить раньше, то можно было разделить сразу на $3x^2+16x+5$:

$$\frac{60x^3+293x^2-44x-45}{3x^2+16x+5}=20x-9.$$

Уравнение приобретает вид:

$$\frac{(1+3x)^3}{(1+3x)^2}-\frac{(20x-9)(3x+1)(x+5)}{(3x+1)(x+5)}=10-17x\text{, тогда}$$

$3x+1-(20x-9)=10-17x$; $10=10$ — истина,

т. е. решение $\forall x\in D(У)$.

Ответ: любое $\begin{cases} x\neq-\dfrac{1}{3} \\ x\neq-5 \end{cases}$ есть решение.

Решение уравнений высших степеней. Возвратные уравнения

Определение 10. Возвратным уравнением называют уравнение вида:

$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+...+a_nx^{n+1}+\lambda a_nx^n+\lambda^3a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0\lambda^{2n+1}=0$,

если степень уравнения нечетная;

$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+...+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+\lambda a_{n-1}x^{n-1}+\lambda^2a_{n-2}x^{n-2}+...+a_0\lambda^n=0$,

если степень уравнения четная (λ — некоторое число).

Пример 1. $2x^5+3x^4-2x^3-6x^2+81x+486=0$.

Здесь $\lambda=3$. Действительно, уравнение можно представить в виде: $2\cdot x^5+3\cdot x^4-2\cdot x^3-2\cdot 3^1\cdot x^2+3\cdot 3^3\cdot x+2\cdot 3^5=0$,

что соответствует определению возвратного уравнения нечетной степени.

Пример 2. $2x^6+3x^5-2x^4+45x^3+4x^2+12x-16=0$.

Так как $2x^6+3x^5-2x^4+45x^3-2(-2)^1x^2+3(-2)^2x+2(-2)^3=0$, то это тоже возвратное уравнение четной степени, где $\lambda=-2$.

Теорема 1. Возвратное уравнение нечетной степени всегда имеет корень $\boxed{x=-\lambda}$.

Для уравнения из примера 1 – $x=-3$ – корень.

Действительно:

$2\cdot(-3)^5+3\cdot(-3)^4-2\cdot(-3)^3-6\cdot(-3)^2+81\cdot(-3)+486=0$

Теорема 2. Возвратное уравнение четной степени $2n$ может быть сведено к уравнению степени n и к n уравнениям второй степени при помощи подстановки $y=x+\dfrac{\lambda}{x}$.

Для уравнения в примере 2,

$2x^6+3x^5-2x^4+45x^3+4x^2+12x-16=0$, применим подстановку $t=x-\dfrac{2}{x}$, где $\lambda=-2$

Для этого разделим обе части уравнения на x^3.

Получим $2x^3+3x^2-2x+45+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{16}{x^3}=0$.

Сгруппируем: $2\left(x^3-\frac{8}{x^3}\right)+3\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{2}{x}\right)+45=0$.

Так как $t=x-\frac{2}{x}$, то $t^2=x^2-2x\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=x^2+\frac{4}{x^2}-4$,

тогда $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$;

$t^3=x^3-3x^2\frac{2}{x}+3x\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}=\left(x^3-\frac{8}{x^3}\right)-6\left(x-\frac{2}{x}\right)$,

тогда $x^3-\frac{8}{x^3}=t^3+6t$.

Значит $2\left(t^3+6t\right)+3\left(t^2+4\right)-2t+45=0$; $2t^3+3t^2+10t+57=0$;

$a_0=2;\ a_1=3;\ a_2=10;\ a_3=57$

Пусть $f(t)=2t^3+3t^2+10t+57$, $d=\pm1;\pm3;\pm19;\pm57$

$f(-3)=2(-27)+3(-3)^2+10(-3)+57=0$;

$f(-3)=0$, значит $f(t)\,\vdots\,(t+3)$

$$\begin{array}{l|l}
2t^3+3t^2+10t+57 & t+3 \\ \hline
\underline{2t^3+6t^2} & 2t^2-3t+19 \\
\quad -3t^2+10t & \quad D<0 \\
\quad \underline{-3t^2-9t} & \\
\qquad 19t+57 & \\
\qquad \underline{19t+57} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Итак, только $t=-3$ является корнем, значит $x-\frac{2}{x}=-3$

$x^2+3x-2=0$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

Определение 11.

Уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ называется симметричным, если его коэффициенты, одинаково удаленные от начала и от конца, равны между собой.

(Это частный случай возвратного уравнения при $\lambda = 1$.)

Практикум 12

1. $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$.

Очевидно, что это симметричное уравнение ($\lambda = 1$).

Так как $x = 0$ – не является корнем этого уравнения, разделим обе части уравнения на x^2.

(Это один из методов решения возвратных уравнений. В общем виде, для уравнения степени $2n$, разделим обе части уравнения на x^n.)

$\frac{6x^4}{x^2} + \frac{35x^3}{x^2} + \frac{62x^2}{x^2} + \frac{35x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0$; $6x^2 + 35x + 62 + \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$.

Группируя, получим: $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$.

Положим $t = x + \frac{1}{x}$. $t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$.

Значит $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Подставляя, имеем: $6\left(t^2 - 2\right) + 35t + 62 = 0$;

$6t^2 + 35t + 50 = 0$; $t_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{12} = \frac{-35 \pm 5}{12}$; $\left[\begin{array}{l} t = -\frac{10}{3} \\ t = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$;

а) $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$; $3x^2 + 10x + 3 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{-5 \pm 4}{3}$; $x_1 = -3$; $x_2 = -\frac{1}{3}$.

б) $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$; $2x^2 + 5x + 2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$;

$x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Примечание. Если в симметричном уравнении $x=a$ – корень, то $x=\frac{1}{a}$ – тоже корень уравнения.

Ответ: $\left\{-3; -2; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

2. $3x^3-7x^2-7x+3=0$.

Данное уравнение также является симметричным уравнением. Здесь наиболее удачным решением является группировка с разложением на множители.

$(3x^3+3)-(7x^2+7x)=0;$

$3(x+1)(x^2-x+1)-7x(x+1)=0;$

$(x+1)(3x^2-3x+3-7x)=0;$ $(x+1)(3x^2-10x+3)=0;$

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 3x^2-10x+3=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm4}{3} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{3} \\ x=3 \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$.

3. $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$.

Это симметричное уравнение нечетной степени. Если внимательно присмотреться, то можно заметить, что $x=-1$ – есть корень уравнения, т. е. для

$\varphi(x)=x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1 \quad \varphi(-1)=0$.

Действительно,

$\varphi(-1)=(-1)^5+2(-1)^4+3(-1)^3+3(-1)^2+2(-1)+1=0$.

Значит $\varphi(x)$ – можно разложить на множители, одним из которых будет $(x+1)$, т. е. $\varphi(x) \vdots (x+1)$ ($\vdots$ символ кратности).

Разделим.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1 & x+1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^5+\ x^4} & x^4+x^3+2x^2+x+1 \\
\quad x^4+3x^3 & \\
\quad \underline{x^4+\ x^3} & \\
\qquad 2x^3+3x^2 & \\
\qquad \underline{2x^3+2x^2} & \\
\qquad\quad x^2+2x & \\
\qquad\quad \underline{x^2+\ x} & \\
\qquad\qquad x+1 & \\
\qquad\qquad \underline{x+1} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Получилось также симметричное уравнение, но уже четной степени.

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=0 \quad \left(:x^2\right);$$

$$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0\,; \quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0\,.$$

Пусть $t=x+\dfrac{1}{x}$; $t^2=x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$;

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2\,; \quad t^2-2+t+2=0\,; \quad t\left(t+1\right)=0\,.$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=0 \\ x+\dfrac{1}{x}=-1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+1}{x}=0;\ x\in\varnothing \\ x^2+x+1=0;\ D<0 \end{array}\right..$$

Ответ: $x=-1$.

Примечание. Всякое симметричное уравнение нечетной степени имеет корень $x=-1$ (теорема 1), и, при делении этого уравнения на $\left(x+1\right)$, получится симметричное уравнение четной степени.

4. $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0$.

В данном уравнении все коэффициенты равно отстоящие от начала и конца равны, но, увы, только по абсолютной величине.

Примечание. Если уравнение имеет вид $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4x=0$, где $a_1=-a_3$; $a_0=a_4$, то оно называется косо-симметричным, но решается почти так же как и симметричное.

Как оно решается посмотрим на примере:

$$x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0 \quad \left(:x^2\right);$$

$$x^2+5x+4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0; \quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x-\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

Здесь положим:

$$x-\frac{1}{x}=t, \text{ тогда } x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2;$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2=t^2 \text{ и } x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2.$$

Подставим и получим:

$$\left(t^2+2\right)+5t+4=0; \quad t^2+5t+6=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=-2 \\ x-\frac{1}{x}=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0 \\ x^2+3x-1=0 \end{array}\right.; \quad \begin{array}{l} x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}; \\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}. \end{array}$$

Ответ: $\left\{-\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-3+\sqrt{13}}{2}; -1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right\}$.

Тренировочная работа 9

Решите уравнения:

1. $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$.

2. $5x^5+4x^4+3x^3+3x^2+4x+5=0$.

3. $2x^5-3x^4+5x^3-5x^2+3x-2=0$.

4. $5x^4-12x^3+14x^2-12x+5=0$.

5. $x^4+3x^3-6x^2-3x+1=0$.

6. $6x^2+3x+1+\frac{2x^2+x-5}{2x^2+x}=0$.

7. $\frac{1-9x}{x^2+2x-3}+\frac{3x-1}{x-1}=\frac{2x}{x+3}$.

8. $\frac{9x^2-42x-15}{4x^2-21x+5}=\frac{(4x+1)^2}{16x^2-1}$.

9. $(2x+8)^2(13x-39)=26(4x^2-64)(x-3)$.

10. $\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{12}$.

11. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

12. $\left(\frac{x+2}{2x^2+3x-2}-\frac{x-1}{3x^2-x-2}\right)(6x^2+x-2)=0$.

13. $x^4+x^3-11x^2-5x+30=0$.

14. $x^5-2x^3-8x^2+13x-10=0,\quad x\in\mathbb{Z}$.

15. $x^3+7x^2+4x-12=0$.

16. $12x^4+52x^3-43x^2-13x+10=0$.

17. $\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+x-6}+\frac{196-173x}{5x^2-14x+8}=x$.

Решение тренировочной работы 9

1. $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$. $\left(:x^2\right)$

$x^2+x-10+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$; $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$.

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$. $t^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$;

$\left(t^2-2\right)+t-10=0$; $t^2+t-12=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-4 \\ x+\frac{1}{x}=3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+4x+1=0 \\ x^2-3x+1=0 \end{array}\right.$; $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$; $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{-2-\sqrt{3};\ -2+\sqrt{3};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. $5x^5+4x^4+3x^3+3x^2+4x+5=0$.

Пусть $\varphi(x)=5x^5+4x^4+3x^3+3x^2+4x+5$.

$\varphi(-1)=5(-1)^5+4(-1)^4+3(-1)^3+3(-1)^2+4(-1)+5=$
$=-5+4-3+3-4+5=0.$

Разделим уголком:

$$
\begin{array}{l|l}
5x^5+4x^4+3x^3+3x^2+4x+5 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^5+5x^4} & 5x^4-x^3+4x^2-x+5 \\
\quad -x^4+3x^3 & \\
\quad \underline{-x^4-\ x^3} & \\
\qquad 4x^3+3x^2 & \\
\qquad \underline{4x^3+4x^2} & \\
\qquad\quad -x^2+4x & \\
\qquad\quad \underline{-x^2-\ x} & \\
\qquad\qquad 5x+5 & \\
\qquad\qquad \underline{5x+5} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$5x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 5 = 0$. $\left(:x^2\right)$

$5x^2 - x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} = 0$; $5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$; $t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$;

$5\left(t^2 - 2\right) - t + 4 = 0$; $5t^2 - t - 6 = 0$; $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{10} = \frac{1 \pm 11}{10}$;

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{6}{5} \\ t = -1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{6}{5} \\ x + \frac{1}{x} = -1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 5x^2 - 6x + 5 = 0;\ D < 0 \\ x^2 + x + 1 = 0;\ D < 0 \end{array}\right.$.

Ответ: $x = -1$.

3. $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$.

Пусть $\varphi(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

Здесь $\varphi(1) = 2 - 3 + 5 - 5 + 3 - 2 = 0$. Значит $\varphi(x) \vdots (x - 1)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{l|l}
2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^5 - 2x^4} & 2x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 2 \\
\quad -x^4 + 5x^3 & \\
\quad \underline{-x^4 + x^3} & \\
\qquad 4x^3 - 5x^2 & \\
\qquad \underline{4x^3 - 4x^2} & \\
\qquad\quad -x^2 + 3x & \\
\qquad\quad \underline{-x^2 + x} & \\
\qquad\qquad 2x - 2 & \\
\qquad\qquad \underline{2x - 2} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Тогда $2x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0$. $\left(:x^2\right)$

$2x^2 - x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$; $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$.

Пусть $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $2\left(t^2 - 2\right) - t + 4 = 0$;

$$2t^2-t=0\,;\quad \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=0 \\ x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{ll} \frac{x^2+1}{x}=0; & x\in\varnothing \\ 2x^2-x+2=0; & D<0 \end{array}\right..$$

Ответ: $x=1$.

Примечание. Исходное уравнение возвратное, нечетной степени, где $x=-\lambda$, а $x=-\lambda$ — корень.

4. $5x^4-12x^3+14x^2-12x+5=0$. $\left(:x^2\right)$

$$5x^2-12x+14-\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}=0\,;\quad 5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-12\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0\,;$$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$;

$$5\left(t^2-2\right)-12t+14=0\,;\quad 5t^2-12t+4=0\,;\quad t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{5}=\frac{6\pm4}{5}\,;$$

$$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{2}{5} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=2 \\ x+\frac{1}{x}=\frac{2}{5} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{ll} x^2-2x+1=0; & x=1 \\ 5x^2-2x+5=0; & D<0 \end{array}\right..$$

Ответ: $x=1$.

5. $x^4+3x^3-6x^2-3x+1=0$. $\left(:x^2\right)$

$$x^2+3x-6-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0\,;\quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-6=0\,.$$

Пусть $t=x-\frac{1}{x}$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$;

$$t^2+2+3t-6=0\,;\quad t^2+3t-4=0\,;$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=-4 \\ x-\frac{1}{x}=1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2+4x-1=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right.;\quad \begin{array}{l} x_{1,2}=-2\pm\sqrt{5}\,; \\ x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}$$

Ответ: $\left\{-2-\sqrt{5}\,;-2+\sqrt{5}\,;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. $6x^2+3x+1+\dfrac{2x^2+x-5}{2x^2+x}=0$.

Пусть $2x^2+x=t$.

$$3\left(2x^2+x\right)+1+\frac{\left(2x^2+x\right)-5}{2x^2+x}=0;$$

$$3t+1+\frac{t-5}{t}=0; \quad 3t^2+2t-5=0;$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+15}}{3}=\frac{-1\pm4}{3};$$

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+x=1\\ 2x^2+x=-1\frac{2}{3}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}2x^2+x-1=0; \quad x_1=-1; \ x_2=\frac{1}{2}\\ 6x^2+3x+5=0; \ D<0.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$.

7. $\dfrac{1-9x}{x^2+2x-3}+\dfrac{3x-1}{x-1}=\dfrac{2x}{x+3}$.

Так как $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

$$\frac{1-9x}{(x+3)(x-1)}+\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2x}{x+3}=0; \qquad D(У): \begin{cases}x\neq-3\\ x\neq1\end{cases};$$

$$1-9x+(3x-1)(x+3)-2x(x-1)=0;$$

$$1-9x+3x^2+8x-3-2x^2+2x=0;$$

$$x^2+x-2=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\notin D(У)\end{array}\right..$$

Ответ: $x=-2$.

8. $\dfrac{9x^2-42x-15}{4x^2-21x+5}=\dfrac{(4x+1)^2}{16x^2-1}$.

а) $4x^2-21x+5=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{21\pm\sqrt{441-80}}{8}=\dfrac{21\pm19}{8}$; $\quad \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$.

$$4x^2-21x+5=4(x-5)\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x-5)(4x-1)$$

б) $9x^2-42x-15=0$;

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+15}}{3}=\frac{7\pm 8}{3};\quad \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.;$$

$$9x^2-42x-15=9(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)=3(x-5)(3x+1).$$

Уравнение примет вид

$$\frac{3(x-5)(3x+1)}{(x-5)(4x-1)}=\frac{(4x+1)^2}{16x^2-1};\qquad D(У):\begin{cases}x\neq 5\\ x\neq\pm\frac{1}{4}\end{cases}.$$

$$\frac{3(3x+1)}{4x-1}=\frac{4x+1}{4x-1};$$

$$3(3x+1)=(4x+1);$$

$$9x+3=4x+1;$$

$$5x=-2;\quad x=-0{,}4\in D(У).$$

Ответ: $x=-0{,}4$.

9. $(2x+8)^2(13x-39)=26(4x^2-64)(x-3)$.

$$4(x+4)^2 13(x-3)-2\cdot 13\cdot 4(x^2-16)(x-3)=0;$$

$$4\cdot 13(x-3)\left((x+4)^2-2(x+4)(x-4)\right)=0;$$

$$(x-3)(x+4)(x+4-2(x-4))=0;$$

$$(x-3)(x+4)(12-x)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-4\\ x=12\end{array}\right..$$

Ответ: $\{-4;3;12\}$.

10. $\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{12}$. $\quad D(У):\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 2\\ x\neq 1\end{cases}$.

$\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-2x+1}=\frac{1}{12}$.

Пусть $x^2-2x=t$, тогда уравнение примет вид.

$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}=\frac{1}{12}$

$12(t+1)-12t=t(t+1)$; $12t+12-12t=t^2+t$; $t^2+t-12=0$;

$\left[\begin{array}{l}t=-4\\ t=3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-4\\ x^2-2x=3\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{ll}x^2-2x+4=0; & D<0\\ x^2-2x-3=0; & x_1=3;\ x_2=-1.\end{array}\right.$

Ответ: $\{-1;3\}$.

11. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

Для решения этого уравнения сгруппируем первый и четвертый множитель и второй и третий множитель и перемножим их.

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=24$;

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$.

Пусть $x^2+5x+4=t$, тогда

$t(t+2)=24$; $t^2+2t-24=0$;

$\left[\begin{array}{l}t=-6\\ t=4\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x^2+5x+4=-6\\ x^2+5x+4=4\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{ll}x^2+5x+10=0; & D<0\\ x^2+5x=0; & x_1=0;\ x_2=-5.\end{array}\right.$

Примечание. Уравнение вида $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)=p$ обращается в квадратное уравнение, если $a_1+a_2=a_3+a_4$, или $a_1+a_3=a_2+a_4$, или $a_1+a_4=a_2+a_3$.

Ответ: $\{0;-5\}$.

12. $\left(\frac{x+2}{2x^2+3x-2}-\frac{x-1}{3x^2-x-2}\right)\left(6x^2+x-2\right)=0$.

а) $2x^2+3x-2=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm5}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.;$$

$$2x^2+3x-2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=(2x-1)(x+2);$$

б) $3x^2-x-2=0$; $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\frac{1\pm5}{6}$; $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$;

$$3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(x-1)(3x+2);$$

в) $6x^2+x-2=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\frac{-1\pm7}{12};\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.;$$

$$6x^2+x-2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(2x-1)(3x+2);$$

$$D(У):\ \begin{cases} x\neq1 \\ x\neq-2 \\ x\neq\frac{1}{2} \\ x\neq-\frac{2}{3} \end{cases};$$

$$\left(\frac{x+2}{(2x-1)(x+2)}-\frac{x-1}{(3x+2)(x-1)}\right)(2x-1)(3x+2)=0;$$

$$\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{3x+2}\right)(2x-1)(3x+2)=0;$$

$$\frac{(3x+2-2x+1)(2x-1)(3x+2)}{(2x-1)(3x+2)}=0;$$

$$\frac{(x+3)(2x-1)(3x+2)}{(2x-1)(3x+2)}=0;$$

$x+3=0$; $x=-3\in D(У)$.

Ответ: $x=-3$.

13. $x^4+x^3-11x^2-5x+30=0$.

$d=\pm1;\pm2;\pm3;\pm5;\pm6;\pm15;\pm10;\pm30$.

$f(1)\neq0;\quad f(-1)\neq0;$

$f(2)=16+8-44-10+30=0$,

тогда

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x^3-11x^2-5x+30 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-2x^3} & x^3+3x^2-5x-15 \\
\quad 3x^3-11x^2 & \\
\quad \underline{3x^3-6x^2} & \\
\qquad -5x^2-5x & \\
\qquad \underline{-5x^2+10x} & \\
\qquad\quad -15x+30 & \\
\qquad\quad \underline{-15x+30} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\varphi(x)=x^3+3x^2-5x-15$;

$\varphi(-3)=-27+27+15-15=0$;

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-5x-15 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+3x^2} & x^2-5 \\
\qquad -5x-15 & \\
\qquad \underline{-5x-15} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$x^2-5=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-3;2;-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

14. $x^5-2x^3-8x^2+13x-10=0$. $x\in\mathbb{Z}$ **(найти целые корни)**

а) $f(1)\neq 0$; $f(-1)\neq 0$; $f(2)=0$.

Значит $f(x)\,\vdots\,(x-2)$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5-2x^3-8x^2+13x-10 & x-2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^5-2x^4} & x^4+2x^3+2x^2-4x+5 \\
\quad 2x^4-2x^3 & \\
\quad \underline{2x^4-4x^3} & \\
\qquad 2x^3-8x^2 & \\
\qquad \underline{2x^3-4x^2} & \\
\qquad\quad -4x^2+13x & \\
\qquad\quad \underline{-4x^2+8x} & \\
\qquad\qquad 5x-10 & \\
\qquad\qquad \underline{5x-10} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

б) $\varphi(x)=x^4+2x^3+2x^2-4x+5$.

Проверять $\varphi(1)$ и $\varphi(-1)$ уже не нужно, так как если бы эти значения были корнями, то $f(1)=0$ и $f(-1)=0$, но это не так. $\varphi(5)\neq 0$; $\varphi(-5)\neq 0$.

Других целых делителей числа 5 нет.

Значит, только $x=2$ – целый корень уравнения $f(x)=0$, других целых корней нет.

Ответ: $x=2$.

Примечание. Можно проще.

Так как $x^4+2x^3+2x^2-4x+5=x^4+2x^3+x^2+x^2-4x+5=$ $=\left(x^2+x\right)^2+(x-2)^2+1>0\ \forall x$, то $x=2$ единственный корень уравнения.

15. $x^3+7x^2+4x-12=0$.

$d=\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12$;

а) $\varphi(1)=1+7+4-12=0$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+7x^2+4x-12 & x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3-\ \ x^2} & x^2+8x+12 \\
\quad 8x^2+4x & \\
\quad \underline{8x^2-8x} & \\
\qquad 12x-12 & \\
\qquad \underline{12x-12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

б) $x^2+8x+12=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-6;-2;\ 1\}$.

16. $12x^4+52x^3-43x^2-13x+10=0$

Тогда рациональными корнями уравнения могут быть числа вида $\frac{p}{g}$, где p – делитель числа 10, а g – делитель числа 12.

$f(1)\neq 0$

$f(-1)\neq 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{13}{2}-\frac{43}{4}-\frac{13}{2}+10=0$.

значит $f(x)\vdots\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Выполним деление.

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4+52x^3-43x^2-13x+10 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
\underline{12x^4-6x^3} & 12x^3+58x^2-14x-20 \\
\qquad 58x^3-43x^2 & \\
\qquad \underline{58x^3-29x^2} & \\
\qquad\qquad -14x^2-13x & \\
\qquad\qquad \underline{-14x^2+7x} & \\
\qquad\qquad\qquad -20x+10 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-20x+10} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\varphi(x)=12x^3+58x^2-14x-20$;

$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=-12\cdot\frac{1}{8}+29\cdot\frac{1}{2}+14\cdot\frac{1}{2}-20=0$, т. е. $\varphi(x)\,\vdots\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Выполним деление.

$$
\begin{array}{l|l}
12x^3+58x^2-14x-20 & x+\frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
\underline{12x^3+6x^2} & 12x^2+52x-40 \\
\qquad 52x^2-14x & \\
\qquad \underline{52x^2+26x} & \\
\qquad\qquad -40x-20 & \\
\qquad\qquad \underline{-40x-20} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Итак, $12x^2+52x-40=0$; $3x^2+13x-10=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{169+120}}{6}=\dfrac{-13\pm17}{6}$; $\left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-5;\,-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2};\,\frac{2}{3}\right\}$.

17. $\dfrac{x^3+9x^2+27x+27}{x^2+x-6}+\dfrac{196-173x}{5x^2-14x+8}=x$.

а) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$;

б) $5x^2-14x+8=0$;

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{5}=\frac{7\pm3}{5};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{4}{5} \end{array}\right.;$$

$$5x^2-14x+8=5(x-2)\left(x-\frac{4}{5}\right)=(x-2)(5x-4).$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{(x+3)^3}{(x+3)(x-2)}+\frac{196-173x}{(5x-4)(x-2)}=x \qquad D(У):\begin{cases} x\neq-3 \\ x\neq2 \\ x\neq\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{(x+3)^2}{x-2}+\frac{196-173x}{(5x-4)(x-2)}-x=0;$$

$$(x+3)^2(5x-4)+196-173x-x(5x-4)(x-2)=0;$$

$$\left(x^2+6x+9\right)(5x-4)+196-173x-5x^3+14x^2-8x=0;$$

$$5x^3+26x^2+21x-36-5x^3+14x^2-181x+196=0;$$

$$40x^2-160x+160=0;$$

$$x^2-4x+4=0;$$

$$x=2\notin D(У).$$

Ответ: $x\in\varnothing$ (решения нет).

Еще несколько способов решения уравнений

1. $\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{13}{36}$.

Вычтем из обеих частей уравнения удвоенное произведение $\dfrac{1}{x+1}$ и $\dfrac{1}{x+2}$ (для выделения полного квадрата в левой части уравнения).

Итак,

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{13}{36}; \qquad \left(-\frac{2}{(x+1)(x+2)}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-\frac{2}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{13}{36}-\frac{2}{(x+1)(x+2)};$$

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)^2=\frac{13}{36}-\frac{2}{(x+1)(x+2)}; \quad \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)^2=\frac{13}{36}-\frac{2}{(x+1)(x+2)}.$$

Пусть $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=a$; $\quad a^2=\dfrac{13}{36}-2a$; $\quad 36a^2+72a-13=0$;

$$a_{1,2}=\frac{-36\pm\sqrt{1296+468}}{36}=\frac{-36\pm\sqrt{1764}}{36}=\frac{-36\pm 42}{36}; \quad \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{6} \\ a=-\dfrac{13}{6} \end{array}\right.;$$

а) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{6}$;

$$x^2+3x+2=6; \quad x^2+3x-4=0; \quad \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1 \end{array}\right..$$

б) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=-\dfrac{13}{6}$;

$6=-13x^2-39x-26$;

$13x^2+39x+32=0$;

$D<0$.

О т в е т: $\{-4;1\}$.

2. $\dfrac{24}{x^2-2x}=\dfrac{12}{x^2-x}+x^2-x$. $D(У)$: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2. \\ x\neq 1 \end{cases}$

Для решения этого уравнения представим дробь в виде алгебраической суммы двух других дробей.

$$\frac{1}{x^2-2x}=\frac{1}{x(x-2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right);$$

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x},$$

тогда

$$24\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)=12\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+x(x-1);$$

$$\frac{12}{x-2}-\frac{12}{x}=\frac{12}{x-1}-\frac{12}{x}+x(x-1);$$

$$12\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)=x(x-1);$$

$$\frac{12}{(x-2)(x-1)}=x(x-1),$$

значит $x(x-1)(x-1)(x-2)=12$.

Сгруппируем и перемножим первый и четвертый множитель, затем второй и третий множитель (аналогичный прием был уже показан).

$$(x^2-2x)(x^2-2x+1)=12.$$

Положим $x^2-2x=a$.

Уравнение приобретет вид

$$a(a+1)=12;$$

$$a^2+a-12=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} a=-4 \\ a=3 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-4 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x+4=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right., D<0;\quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

3. $(x+1)^3+\frac{27}{x^2}(x+1)+1=\frac{9}{x}(x+1)^2+\frac{27}{x^3}$. $\qquad D(У)$: $x\neq 0$.

Прямой путь возведения в степень и приведения к общему знаменателю технически очень сложен. Перенесем слагаемые правой части в левую сторону и сгруппируем слагаемые в порядке убывания степеней при $(x+1)$.

Получим $(x+1)^3-\frac{9}{x}(x+1)^2+\frac{27}{x^2}(x+1)-\frac{27}{x^3}+1=0$;

учитывая, что $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$, получим

$\left(x+1-\frac{3}{x}\right)^3+1=0$, значит $x+1-\frac{3}{x}=-1$.

Тогда $x^2+2x-3=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

О т в е т: $\{-3;1\}$.

4. $\frac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}=11x^2-34$.

Перемножать и затем раскладывать на множители очень накладно, попробуем выделить целую часть в левой дроби уравнения. Для этого поделим уголком.

$$
\begin{array}{l|l}
x^8+\ x^4-2x^2+6 & x^4+2x^2+3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^8+2x^6+3x^4} & x^4-2x^2+2 \\
\quad -2x^6-2x^4-2x^2 & \\
\quad \underline{-2x^6-4x^4-6x^2} & \\
\qquad\quad 2x^4+4x^2+6 & \\
\qquad\quad \underline{2x^4+4x^2+6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Повезло, что разделилось нацело. Итак,

$x^4-2x^2+2=11x^2-34$; $\quad x^4-13x^2+36=0$; $\left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=9 \end{array}\right.$.

О т в е т: $\{-3;-2;2;3\}$.

5. $3\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2+168\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2-46\frac{x^2-9}{x^2-4}=0$. $\qquad D(У): \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -2 \end{cases}.$

Пусть $x^2\neq 9$,

тогда разделим обе части уравнения на $\frac{x^2-9}{x^2-4}$.

$$3\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\frac{x^2-4}{x^2-9}+168\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2\frac{x^2-4}{x^2-9}-46\frac{x^2-9}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-9}=0;$$

$$3\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)}+168\frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}-46=0.$$

Пусть $\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)}=a$, тогда уравнение примет вид

$3a+\frac{168}{a}-46=0; \quad 3a^2-46a+168=0;$

$a_{1,2}=\frac{23\pm\sqrt{529-504}}{3}=\frac{23\pm5}{3}; \quad \left[\begin{array}{l} a=9\frac{1}{3}; \\ a=6 \end{array}\right.$

а) $\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)}=9\frac{1}{3};$

$3\left(x^2-5x+6\right)=28\left(x^2+5x+6\right); \quad 25x^2+155x+150=0;$

$5x^2+31x+30=0;$

$x_{1,2}=\frac{-31\pm\sqrt{961-600}}{10}=\frac{-31\pm19}{10}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-1,2 \end{array}\right. \in D(У);$

б) $\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x+2)}=6;$

$x^2-5x+6=6\left(x^2+5x+6\right);$

$5x^2+35x+30=0; \quad x^2+7x+6=0; \quad \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-1 \end{array}\right. \in D(У)$

Проверим, что будет если:

а) $x=3$; $\quad 0+168\cdot6^2-0=0$ – ложь, т.е. $x=3$ не является корнем.

б) $x=-3$; $\quad 3\cdot6^2+0-0=0$ – ложь, т.е. $x=-3$ не является корнем.

Ответ: $\{-5;-1{,}2;-1;-6\}$.

6. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Для решения примеров такого типа рассмотрим бином Ньютона:

$$(a+b)^n=A_0a^n+A_1a^{n-1}b+A_2a^{n-2}b^2+\cdots A_ka^{n-k}b^k+\cdots A_nb^n,$$

где A_0; A_1; A_2; A_3; A_k; A_n – коэффициенты при a в n-й степени, которые вычисляются по правилу:

$$A_k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1\cdot k\cdot(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Здесь n – степень бинома, а k обозначает $(k+1)$-ое слагаемое разложения $(k<n)$.

Но можно иначе.

Составим таблицу коэффициентов разложения в зависимости от степени:

Степень	Коэффициенты (в n-й степени $(n+1)$ – слагаемых)										
$(a+b)^0$	1										2^0
$(a+b)^1$	1	1									2^1
$(a+b)^2$	1	2	1								2^2
$(a+b)^3$	1	3	3	1							2^3
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1						2^4
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1					2^5
$(a+b)^6$	1	**6**	**15**	20	15	6	1				2^6
$(a+b)^7$	1	7	**21**	35	**35**	**21**	7	1			2^7
$(a+b)^8$	1	8	28	56	70	**56**	28	8	1		2^8
$(a+b)^9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	2^9
$(a+b)^{10}$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	2^{10}

Таблица любопытная:

А) Второй столбец – степень двучлена по возрастанию.

Б) Вторая диагональ – степень двучлена.

В) Для того, чтобы найти коэффициент в третьем слагаемом седьмой степени двучлена, необходимо сложить коэффициенты при втором и третьем слагаемых шестой степени двучлена. И так можно получить коэффициенты при любом слагаемом n-й степени разложения.

Г) Очень интересно, что сумма всех коэффициентов в разложении любой степени равна этой же степени числа двух, т. е. $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 2^n$ и т. д.

Теперь можно заняться собственно решением самого уравнения

$(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

Положим $t = \frac{(x+3)+(x+5)}{2} = x+4$.

Тогда $x = t-4$.

Из уравнения $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16$, учитывая распределение коэффициентов, получим: (чередование знаков)

$$
+\begin{array}{l}
(t+1)^4 = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 \\
(t-1)^4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 2t^4 + 0 + 12t^2 + 0 + 2.$

Значит $2t^4 + 12t^2 + 2 = 16$;

$t^4 + 6t^2 - 7 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t^2 = -7 \\ t^2 = 1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x+4 = 1 \\ x+4 = -1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -5 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-5; -3\}$.

7. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

Положим $t=\frac{x-1+x+3}{2}=x+1$, тогда $x=t-1$.

Получим $(t-2)^5+(t+2)^5=242t$,

так как

$$\begin{array}{rl} & (t+2)^5 = t^5+5\cdot t^4\cdot 2+10t^3\cdot 2^2+10t^2\cdot 2^3+5t\cdot 2^4+2^5 \\ + & \\ & \underline{(t-2)^5 = t^5-5\cdot t^4\cdot 2+10t^3\cdot 2^2-10t^2\cdot 2^3+5t\cdot 2^4-2^5} \end{array}$$

$$(t+2)^5+(t-2)^5 = 2t^5+0+2\cdot 10\cdot 2^2t^3+0+2\cdot 5\cdot 2^4t+0.$$

Итак $2t^5+80t^3+160t=242t$.

а) $t=0$;

б) $t^4+40t^2-41=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ t^2=-41 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right..$$

Значит $\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+1=1 \\ x+1=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right..$

Ответ: $\{-2;-1;0\}$.

8. $\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$.

Сгруппируем:

$$\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{x-5}\right)+\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}\right)+\left(\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}\right)=0;$$

$$3\cdot\frac{x-5+x}{x(x-5)}+\frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}+\frac{4(2x-5)}{(x-2)(x-3)}=0;$$

$$(2x-5)\left(\frac{3}{x^2-5x}+\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{4}{x^2-5x+6}\right)=0;$$

а) $2x-5=0$; $x=2{,}5$;

б) пусть $x^2-5x=t$, тогда

$$\frac{3}{t}+\frac{1}{t+4}+\frac{4}{t+6}=0\ ;\quad \begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq -4\ ; \\ t\neq -6 \end{cases}$$

$$\frac{3(t+4)(t+6)+t(t+6)+4t(t+4)}{t(t+4)(t+6)}=0\ ;$$

$$3\left(t^2+10t+24\right)+t^2+6t+4t^2+16t=0\ ;$$

$$8t^2+52t+72=0\ ;\quad 2t^2+13t+18=0\ ;$$

$$t_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169-144}}{4}=\frac{-13\pm 5}{4}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4+4x^3-x^2-16x-12 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+x^3} & x^3+3x^2-4x-12 \\
\quad 3x^3-x^2 & \\
\quad \underline{3x^3+3x^2} & \\
\qquad -4x^2-16x & \\
\qquad \underline{-4x^2-4x} & \\
\qquad\qquad -12x-12 & \\
\qquad\qquad \underline{-12x-12} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

б) $\varphi(x)=x^3+3x^2-4x-12$; $\varphi(2)=8+12-8-12=0$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-4x-12 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2} & x^2+5x+6 \\
\quad 5x^2-4x & \\
\quad \underline{5x^2-10x} & \\
\qquad 6x-12 & \\
\qquad \underline{6x-12} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

в) $x^2+5x+6=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1;-2;-3;2\}$.

10. $\dfrac{x^3+2x-2}{x^3+2x-3}=\dfrac{x^3+x+3}{x^3+x+2}$.

Воспользоваться свойством пропорций можно, но довольно непросто. Попытаемся выделить целую часть в левой и правой частях уравнения.

$L=\dfrac{x^3+2x-2}{x^3+2x-3}=\dfrac{\left(x^3+2x-3\right)+1}{x^3+2x-3}=1+\dfrac{1}{x^3+2x-3}$ (левая часть);

$$П=\frac{x^3+x+3}{x^3+x+2}=\frac{\left(x^3+x+2\right)+1}{x^3+x+2}=1+\frac{1}{x^3+x+2}$$ (правая часть).

Тогда $\frac{1}{x^3+2x-3}=\frac{1}{x^3+x+2}$; $x^3+x+2=x^3+2x-3$; $x=5$.

Пусть $f(x)=x^3+2x-3$; $f(5)=125+10-3\neq 0$;

$f(x)=x^3+x+2$; $f(5)=125+5+2\neq 0$. Значит $5\in D(У)$.

Ответ: $x=5$.

11. $2x^4-10x^3+15x^2-7x+1=0$.

Это уравнение не является возвратным.

$f(1)\neq 0$; $f(-1)\neq 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)\neq 0$

Значит рациональных корней нет. Конечно, существуют формулы Кардано-Феррари, по которым можно решить любое уравнение 3-й и 4-й степени, но это требует знания комплексных чисел. Попробуем применить другие соображения.

Многочлен 4-й степени с целыми коэффициентами можно представить в виде произведения двух квадратных трехчленов.

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=\left(b_0x^2+b_1x+b_2\right)\left(c_0x^2+c_1x+c_2\right),$$

где b_0; b_1; b_2; c_0; c_1; $c_2\in\mathbb{Z}$.

Рассмотрим данное уравнение:

а) так как $a_0=2$, то $b_0c_0=2$ и, либо $b_0=1$ и $c_0=2$, либо $b_0=2$ и $c_0=1$ (случаи $b_0<0$ и $c_0<0$ пока исключим);

б) $a_4=1$, тогда $b_2c_2=1$, значит $b_2=1$ и $c_2=1$ (случаи $b_2<0$ и $c_2<0$ пока исключим), тогда $2x^4-10x^3+15x^2-7x+1=\left(2x^2+b_1x+1\right)\left(x^2+c_1x+1\right)$, но $\left(2x^2+b_1x+1\right)\left(x^2+c_1x+1\right)=$

$=2x^4+b_1x^3+x^2+2c_1x^3+b_1c_1x^2+c_1x+2x^2+b_1x+1=$

$=2x^4+\left(b_1+2c_1\right)x^3+\left(3+b_1c_1\right)x^2+\left(c_1+b_1\right)x+1$.

Два многочлена равны, если все коэффициенты при соответствующих степенях равны.

$$\begin{cases} b_1+2c_1=-10 \\ 3+b_1c_1=15 \\ c_1+b_1=-7 \end{cases};\quad \begin{cases} b_1c_1=12 \\ c_1+b_1=-7 \end{cases}.$$

По теореме обратной теореме Виета, эта система порождает уравнение $m^2+7m+12=0$.

Значит или $c_1=-4$ и $b_1=-3$ или $c_1=-3$ и $b_1=-4$, но $b_1+2c_1=-10$, тогда $c_1=-3$ и $b_1=-4$.

Значит $2x^4-10x^3+15x^2-7x+1=\left(2x^2-4x+1\right)\left(x^2-3x+1\right)=0$.

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2-4x+1=0 \\ x^2-3x+1=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Так как больше четырех корней у данного уравнения быть не может, то случаи с отрицательными коэффициентами b_0, c_0, b_2 и c_2 рассматривать нет смысла.

Ответ: $\left\{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

12. $12x^6-52x^5-13x^4+156x^3-13x^2-52x+12=0$.

В данном случае это возвратное уравнение. Известно, что возвратное уравнение четной степени можно с помощью подстановки $t=x+\dfrac{1}{x}$ привести к уравнению в два раза меньшей степени. Для этого уравнение степени $2n$ делят на x в n-ой степени и группируют равноотстоящие члены, после чего используют замену $t=x+\dfrac{1}{x}$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}=t^3-3t$ и т. д.

Применим этот прием к данному уравнению. $\left(:x^3\right)$

$$12x^3-52x^2-13x+156-\frac{13}{x}-\frac{52}{x^2}+\frac{12}{x^3}=0\,;$$

$$12\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-52\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+156=0\,.$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=t$.

$$12\left(t^3-3t\right)-52\left(t^2-2\right)-13t+156=0\,;$$

$$12t^3-52t^2-49t+260=0;$$

$$f(4)=0$$

$$\begin{array}{l|l}
12t^3-52t^2-49t+260 & t-4 \\ \cline{2-2}
\underline{12t^3-48t^2} & 12t^2-4t-65 \\
\quad -4t^2-49t & \\
\quad \underline{-4t^2+16t} & \\
\qquad -65t+260 & \\
\qquad \underline{-65t+260} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$12t^2-4t-65=0\,;\quad t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+780}}{12}=\frac{2\pm 28}{12}\,;$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{5}{2} \\ t=-\frac{13}{6} \\ t=4 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=-\frac{13}{6} \\ x+\frac{1}{x}=4 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0 \\ 6x^2+13x+6=0 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \\ x=-\frac{2}{3} \\ x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{2\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\,;-\frac{2}{3}\,;2+\sqrt{3}\,;2-\sqrt{3}\right\}$.

13. $x^4+4x^3+18x^2+28x-15=0$.

Рассмотрим еще один метод.

Положим $x=t+a$ и подставим в уравнение:

$(t+a)^4+4(t+a)^3+18(t+a)^2+28(t+a)-15=0$;

$t^4+4t^3a+6t^2a^2+4ta^3+a^4+4t^3+12t^2a+12ta^2+4a^3+18t^2+$

$+36ta+18a^2+28t+28a-15=0$;

$t^4+4(a+1)t^3+6\left(a^2+2a+3\right)t^2+4\left(a^3+3a^2+9a+7\right)t+a^4+$

$+4a^3+18a^2+28a-15=0$.

Идея метода состоит в том, чтобы подобрать такие значения параметра a, при которых уравнение стало бы биквадратным, т.е. коэффициенты при t^3 и t оказались бы равными нулю.

Т.е. $\begin{cases} a+1=0 \\ a^3+3a^2+9a+7=0 \end{cases}$; $a=-1$.

Значит $t^4+12t^2-28=0$; $\left[\begin{array}{l} t^2=-14\notin(0;\infty) \\ t^2=2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2} \\ t=-\sqrt{2} \end{array}\right.$,

тогда $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}-1 \\ x=-\sqrt{2}-1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1\right\}$.

5

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $3(x+3)-2(2x-1)+5(3x-1)=4$.
2. $\frac{4-3(3x+1)}{2}-\frac{2(5-x)}{3}=1$.
3. $3{,}2(2x+5)-1\frac{2}{5}(2-3x)=2{,}6$.
4. $\frac{2{,}2(2x-2{,}1)}{3}-\frac{4\left(2\frac{2}{5}-2{,}5x\right)-1}{5}=1$.
5. $\frac{3(3x+4)-4(5x+6)}{2(2x+1)-5(3x+2{,}8)}=1$.
6. $\frac{2x+3(4x-7)-4}{2(2x+5)-3(5-2x)}=1$.
7. $\frac{2(x-1)+3(4x-11)}{2(2x-5)-3(5-2x)}=2$.
8. $(5x+1)^2(x-4)-(5x-4)^2(x-2)=28$.
9. $(13x+11)^2-(12x+7)^2-(5x+9)^2=19$.
10. $(x-2)^3-(x+2)(x^2-2x+4)+(2-3x)(5-2x)=22$

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $2(2x+1)-3(x-3)-5(3x+1)=4$.

2. $\frac{4+3(3x-1)}{2}-1=\frac{2(5+x)}{3}$.

3. $3{,}2(2x-5)+1{,}4(3x+2)=-2{,}6$.

4. $\frac{1-4\left(2\frac{2}{5}+2{,}5x\right)}{5}-\frac{2{,}2(2x+2{,}1)}{3}=1$.

5. $\frac{5(3x-2{,}8)-2(2x-1)}{4(5x-6)-3(3x-4)}=1$.

6. $\frac{4+3(4x+7)+2x}{2(2x-5)+3(2x+5)}=1$.

7. $\frac{2(2x+5)+3(5+2x)}{2(x+1)+3(4x+11)}=\frac{1}{2}$.

8. $(x+2)(5x+4)^2-(5x-1)^2(x+4)=28$.

9. $(13x-11)^2-(5x-9)^2-(12x-7)^2=19$.

10. $(x-2)(x^2+2x+4)-(x+2)^3+(2+3x)(5+2x)=22$.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}$.

2. $\dfrac{y-1}{(y-4)(y+2)}-\dfrac{1}{(y-1)(y+2)}+\dfrac{3-2y}{2(y-1)(y+2)}=0$.

3. $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}=\left(\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-x}\right):\dfrac{x^3-1}{x^2+x}$.

4. $\left(\dfrac{6x+1}{x^2-6x}+\dfrac{6x-1}{x^2+6x}\right):\dfrac{x^2+1}{x^2-36}-\dfrac{12}{x+1}=\dfrac{12}{x^2+x}$.

5. $\dfrac{1{,}5x^2}{9x^2-1}+\dfrac{3x-1}{3+9x}-\dfrac{3x+1}{6x-2}=0$.

6. $x+2+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{x^3-6}{2x-x^2}=0$.

7. $\dfrac{2x+1}{2x-2}\cdot\left(\dfrac{4x^2-2x}{8x^3+1}-\dfrac{2x}{1+4x+4x^2}\right)=\dfrac{2x}{8x^3+1}$.

8. $8x-(2+x^2)(2-x^2)=(x^2-2x)^2+4x^3$.

9. $\dfrac{(2x^2+x+1)^2-2(2x^2+x+1)+1}{x^2}=0$.

10. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)-(x^2+1)(x^4-x^2+1)+(x^2+1)^3=1$.

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$.

2. $\dfrac{3+2y}{2(y+1)(y-2)}-\dfrac{y+1}{(y+4)(y-2)}=\dfrac{1}{(y+1)(y-2)}$.

3. $\left(\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{x}{x^2-1}\right):\dfrac{x^3+1}{x-x^2}=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$.

4. $\left(\dfrac{1-6x}{x^2+6x}+\dfrac{1+6x}{6x-x^2}\right):\dfrac{x^2+1}{x^2-36}+\dfrac{12}{x-1}=\dfrac{12}{x^2-x}$.

5. $\dfrac{1{,}5x^2}{9x^2-1}+\dfrac{1+3x}{9x-3}-\dfrac{3x-1}{6x+2}=0$.

6. $\dfrac{x^3+6}{x^2+2x}-x+2=\dfrac{4}{x+2}$.

7. $\dfrac{2x-1}{2x+2}\cdot\left(\dfrac{2x}{1-4x+4x^2}-\dfrac{4x^2+2x}{8x^3-1}\right)=\dfrac{2x}{8x^3-1}$.

8. $\left(x^2+2x\right)^2=4x^3-8x-\left(2+x^2\right)\left(2-x^2\right)$.

9. $\dfrac{\left(2x^2-x+1\right)^2-2\left(2x^2-x+1\right)+1}{x^2}=0$.

10. $\left(x^2+1\right)^3-\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)+\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2-3x+1\right)+8x^2=1$.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $6x^2-\left(3\sqrt{3}+2\right)x+\sqrt{3}=0$.

2. $\dfrac{2x-1}{4x+1}=\dfrac{5(3x-5)}{8(6x+1)}$.

3. $\dfrac{5x^2-7x+2}{4x^2+x-5}=\dfrac{(4x-5)^2}{16x^2-25}$.

4. $(x+1)(x-2)^3-\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-x\right)+8=0$.

5. $\dfrac{7+2x}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$.

6. $\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{x-4}{2x^2-13x-45}+\dfrac{3}{20+13x+2x^2}=0$.

7. $\dfrac{2x-2}{2x^2-9x+10}=\dfrac{x-1}{4x^2-4x-15}$.

8. $\left(\dfrac{4x-1}{2x^2-x-10}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)\dfrac{4x^2-10x}{4x-9}-\dfrac{4}{x-2}=2$.

9. $\dfrac{2x-13}{2x+5}:\left(\dfrac{3}{2x^2+13x+20}-\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{24}{2x^2-3x-20}\right)=x-4$.

10. $\dfrac{6x^2-17x-10}{4x^2-12x-7}-\dfrac{x^3+2x^2-9x-18}{(x+3)\left(2x^2-3x-14\right)}=5-x$.

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $6x^2+\left(3\sqrt{3}+2\right)x+\sqrt{3}=0$.

2. $\dfrac{2x+1}{4x-1}=\dfrac{5(3x+5)}{8(6x-1)}$.

3. $\dfrac{5x^2+7x+2}{4x^2-x-5}=\dfrac{(4x+5)^2}{16x^2-25}$.

4. $(x-1)(x+2)^3-\left(x^2+4x+4\right)\left(x^2+x\right)+8=0$.

5. $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3}{x^2-9x+18}=\dfrac{2x-7}{x^2-5x-6}$.

6. $\dfrac{x+4}{2x^2+13x-45}+\dfrac{3}{20-13x+2x^2}=\dfrac{1}{x-4}$.

7. $\dfrac{2x+2}{2x^2+9x+10}=\dfrac{x+1}{4x^2+4x-15}$.

8. $\dfrac{4}{x+2}-\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{4x+1}{2x^2+x-10}\right)\dfrac{4x^2+10x}{4x+9}=2$.

9. $x+4=\dfrac{2x+13}{5-2x}:\left(\dfrac{3}{2x^2-13x+20}-\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{24}{2x^2+3x-20}\right)$.

10. $\dfrac{6x^2+17x-10}{4x^2+12x-7}+\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{(3-x)\left(2x^2+3x-14\right)}=x+5$.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $|x+4|=2$.

2. $|2x+1|=3-x$.

3. $|x^2+2x-3|=x+3$.

4. $|x-3|=x^2+2x-3$.

5. $\dfrac{|x+3|-2}{2-x}=2$.

6. $||x+4|-1|=3$.

7. $||x+4|-2x+1|=2$.

8. $\dfrac{|x+4|}{x^2+6x+8}=1$.

9. $\dfrac{x+5}{|x^2+7x+10|}=2$.

10. $\dfrac{|x^2-2x|}{x-3}+|x+2|=1$.

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $|x-4|=2$.

2. $|2x-1|=3+x$.

3. $|x^2-2x-3|=3-x$.

4. $|x+3|=x^2-2x-3$.

5. $\dfrac{|3-x|-2}{2+x}=2$.

6. $||x-4|-1|=3$.

7. $||x-4|+2x+1|=2$..

8. $\dfrac{|x-4|}{x^2-6x+8}=1$.

9. $\dfrac{5-x}{|x^2-7x+10|}=2$.

10. $|x-2|-\dfrac{|x^2+2x|}{x+3}=1$.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $(x^2+x)^2-8x^2-8x+12=0$.

2. $\dfrac{2x-1}{x}+\dfrac{4x}{2x-1}=5$.

3. $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+9=0$.

4. $\dfrac{4}{9x^2-9x+2}-\dfrac{8}{9x^2-9x+8}=1$.

5. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.

6. $(x^2-3x+5)^4-10x^2(x^2-3x+5)^2+9x^4=0$.

7. $x^2(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)=24$.

8. $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8}+\dfrac{3x}{4x^2-6x+8}=\dfrac{1}{6}$.

9. $(x-1)^3+\dfrac{27}{x^2}(x-1)+27=\dfrac{9}{x}(x-1)^2+\dfrac{27}{x^3}$.

10. $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $\left(x^2-x\right)^2-8x^2+8x+12=0$

2. $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{4x}{2x+1}=5$

3. $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$

4. $\dfrac{4}{9x^2+9x+2}-\dfrac{8}{9x^2+9x+8}=1$

5. $\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}-\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x-2}=1$

6. $9x^4-10x^2\left(x^2+3x+5\right)^2+\left(x^2+3x+5\right)^4=0$

7. $x^2\left(4x^2-1\right)\left(2x^2-1\right)\left(4x^2-3\right)=3$

8. $\dfrac{3x}{4x^2+6x+8}+\dfrac{2x}{4x^2-3x+8}=-\dfrac{1}{6}$

9. $27-\dfrac{27}{4x^2}\left(2x+1\right)+\dfrac{9}{2x}\left(2x+1\right)^2=\left(2x+1\right)^3-\dfrac{27}{8x^3}$

10. $x^2+\dfrac{4x^2}{\left(x-2\right)^2}=5$

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

Решите уравнения:

1. $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$.

2. $2x^6+5x^5-7x^4-9x^3+x^2-36x-36=0$.

3. $30x^4-97x^3+64x^2+28x-16=0$.

4. $x^2+\dfrac{24}{x-4}+\dfrac{6\left(x^2-10\right)}{(x-4)^2}+4x+9=0$.

5. $12x^6+52x^5-13x^4-156x^3-13x^2+52x+12=0$.

6. $x^4-9x^3+18x^2+7x-3=0$.

7. $x^4-4x^3+18x^2-28x-15=0$.

8. $\dfrac{81x^4+135x^2+1}{27x^3+3x}=-7,7$.

9. $(x+2)^5+(4-x)^5=1056$.

10. $\dfrac{135}{x^2-3x}=\dfrac{45}{x^2-x}+2\left(x^2-1\right)$.

Вариант 2

Решите уравнения:

1. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$.

2. $2x^6-5x^5-7x^4+9x^3+x^2+36x-36=0$.

3. $30x^4+97x^3+64x^2-28x-16=0$.

4. $x^2-\frac{24}{x+4}+\frac{6\left(x^2-10\right)}{(x+4)^2}+9-4x=0$.

5. $4x^6-8x^5-21x^4+34x^3+21x^2-8x-4=0$.

6. $x^4+9x^3+18x^2-7x-3=0$.

7. $x^4+4x^3+18x^2+28x-15=0$.

8. $\frac{81x^4+135x^2+1}{21\left(9x^3+x\right)}=1{,}1$.

9. $(4+x)^5-(x-2)^5=1056$.

10. $\frac{135}{x^2+3x}=\frac{45}{x^2+x}+2\left(x^2-1\right)$.

Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $\boxed{-\frac{1}{7}}$ 2. $\boxed{-1}$ 3. $\boxed{-1}$ 4. $\boxed{1\frac{119}{520}}$ 5. $\boxed{x \neq -1\frac{1}{11}}$

6. $\boxed{5}$ 7. $\boxed{\varnothing}$ 8. $\boxed{0}$ 9. $\boxed{1}$ 10. $\boxed{-4}$

Вариант 2

1. $\boxed{\frac{1}{7}}$ 2. $\boxed{1}$ 3. $\boxed{1}$ 4. $\boxed{-1\frac{119}{520}}$ 5. $\boxed{x \neq 1\frac{1}{11}}$

6. $\boxed{-5}$ 7. $\boxed{\varnothing}$ 8. $\boxed{0}$ 9. $\boxed{-1}$ 10. $\boxed{4}$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\boxed{0;-5}$ 2. $\boxed{0,4}$ 3. $\boxed{\varnothing}$ 4. $\boxed{\begin{cases} x \neq \pm 6 \\ x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}}$ 5. $\boxed{-\frac{1}{30}}$

6. $\boxed{\varnothing}$ 7. $\boxed{\begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}}$ 8. $\boxed{1}$ 9. $\boxed{-0,5}$ 10. $\boxed{0}$

Вариант 2

1. $\boxed{5;0}$ 2. $\boxed{-0,4}$ 3. $\boxed{\varnothing}$ 4. $\boxed{\begin{cases} x \neq \pm 6 \\ x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}}$ 5. $\boxed{\frac{1}{30}}$

6. $\boxed{\varnothing}$ 7. $\boxed{\begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq -1 \end{cases}}$ 8. $\boxed{-1}$ 9. $\boxed{0,5}$ 10. $\boxed{0}$

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{3}}$ 2. $\boxed{-1;-\frac{17}{36}}$ 3. $\boxed{-3}$ 4. $\boxed{0;4}$ 5. $\boxed{-8}$

6. $\boxed{14}$ 7. $\boxed{-2\frac{2}{3};1}$ 8. $\boxed{\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 2,25 \\ x \neq 2,5 \end{cases}}$ 9. $\boxed{-12}$ 10. $\boxed{4}$

Вариант 2

1. $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\frac{1}{3}}$ 2. $\boxed{1\,;\,\frac{17}{36}}$ 3. $\boxed{3}$ 4. $\boxed{0;-4}$ 5. $\boxed{8}$

6. $\boxed{-14}$ 7. $\boxed{2\frac{2}{3}\,;\,-1}$ 8. $\boxed{\begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq -2,25 \\ x \neq -2,5 \end{cases}}$ 9. $\boxed{12}$ 10. $\boxed{-4}$

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. $\boxed{-6;-2}$ 2. $\boxed{-4;\frac{2}{3}}$ 3. $\boxed{-3;0;2}$ 4. $\boxed{\frac{-3-\sqrt{33}}{2};\frac{-3+\sqrt{33}}{2}}$ 5. $\boxed{1}$

6. $\boxed{-8;0}$ 7. $\boxed{3;7}$ 8. $\boxed{-1}$ 9. $\boxed{-2,5;-1,5}$ 10. $\boxed{\frac{2-\sqrt{10}}{2};\frac{2+\sqrt{10}}{2}}$

Вариант 2

1. $\boxed{2\,;\,6}$ 2. $\boxed{-\frac{2}{3}\,;\,4}$ 3. $\boxed{-2\,;\,0\,;\,3}$ 4. $\boxed{\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}}$ 5. $\boxed{-1}$

6. $\boxed{0\,;\,8}$ 7. $\boxed{-7\,;\,-3}$ 8. $\boxed{1}$ 9. $\boxed{1,5\,;\,2,5}$ 10. $\boxed{\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}}$

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. $\boxed{-3;-2;1;2}$ **2.** $\boxed{-0,5;1}$ **3.** $\boxed{-2;-0,5}$ **4.** $\boxed{0;1}$ **5.** $\boxed{0;1}$

6. $\boxed{1;5}$ **7.** $\boxed{-2;2}$ **8.** $\boxed{0,25;8}$ **9.** $\boxed{-3;1}$ **10.** $\boxed{-1;2}$

Вариант 2

1. $\boxed{-2\,;-1\,;2\,;3}$ **2.** $\boxed{-1\,;0,5}$ **3.** $\boxed{0,5\,;2}$ **4.** $\boxed{-1\,;0}$ **5.** $\boxed{-1\,;0}$

6. $\boxed{-5\,;-1}$ **7.** $\boxed{-1\,;1}$ **8.** $\boxed{-8\,;-0,25}$ **9.** $\boxed{-0,5\,;1,5}$ **10.** $\boxed{-2\,;1}$

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. $\boxed{-3;-1;2;4}$ **2.** $\boxed{-3;-1,5;-1;2}$ **3.** $\boxed{-\frac{1}{2};\frac{2}{5};\frac{4}{3};2}$ **4.** $\boxed{-2;1;2;3}$

5. $\boxed{-2;-\frac{1}{2};-\sqrt{2}+1;\frac{1}{2};2;1+\sqrt{2}}$ **6.** $\boxed{\frac{5\pm\sqrt{37}}{2};2\pm\sqrt{3}}$

7. $\boxed{1-\sqrt{2};\sqrt{2}+1}$ **8.** $\boxed{-1\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{6};-\frac{1}{15}}$ **9.** $\boxed{0;2}$ **10.** $\boxed{-2;4}$

Вариант 2

1. $\boxed{-4\,;-2\,;1\,;3}$ **2.** $\boxed{-2\,;1\,;1,5\,;3}$ **3.** $\boxed{-2\,;-\frac{4}{3}\,;-\frac{2}{5}\,;\frac{1}{2}}$

4. $\boxed{-3\,;-2\,;-1\,;2}$ **5.** $\boxed{-\frac{3}{2}\,;-\frac{2}{3}\,;-\sqrt{3}+2\,;\frac{1}{2}\,;2\,;2+\sqrt{3}}$

6. $\boxed{-2\pm\sqrt{3}\,;\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}}$ **7.** $\boxed{-\sqrt{2}-1\,;\sqrt{2}-1}$ **8.** $\boxed{\frac{1}{15}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{2}{3}\,;1\frac{2}{3}}$

9. $\boxed{-2\,;0}$ **10.** $\boxed{-4\,;2}$

6 Карточки заданий

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. $\dfrac{5x^2-6x+1}{4x^2+5x+1}=1$.

2. $x^3-6x+8-3x^2=0$.

3. $x(x+1)(x+2)(x+3)=3$.

4. $\dfrac{28x^2+42x}{x+1}=\dfrac{18x^2-33x-90}{x-4}$.

5. $\dfrac{6}{x^2+2x-3}-\dfrac{24}{x^2+2x-8}=1$.

6. $x^3=\dfrac{55x^2-22x-8}{8x^2+22x-55}$.

Карточка 2

1. $\dfrac{2x+3}{12-x-x^2}+0,5=0$.

2. $(2x-1)^2(5x-3)=(x-0,6)(16x^2-4)$.

3. $\dfrac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16}=\dfrac{6x+4}{36x^2-16}$.

4. $\dfrac{6x^2+17x-10}{4x^2+12x-7}+\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{(3-x)(2x^2+3x-14)}=x+5$.

5. $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0$.

6. $\dfrac{(x-1)^2x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{2}{9}$.

Карточка 3

1. $\dfrac{2x+3}{6x^2+5x-6}+\dfrac{3x+2}{4-9x^2}=0$.

2. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.

3. $8x^3-8x^2+1=0$.

4. $\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x^2+x-12}-\dfrac{128x+365}{2x^2+13x+20}=x$.

5. $\left(\dfrac{36x^2}{5x^2+13x-6}-\dfrac{5x-2}{x+3}\right):\dfrac{11x-2}{x^2-2x-5}-\dfrac{28x-x^2}{2-5x}=5$.

6. $\dfrac{81x^4+135x^2+1}{27x^3+3x}=7{,}7$.

Карточка 4

1. $(x+3)^2+\dfrac{1}{x^2+6x+9}=2$.

2. $\dfrac{(2-x)(2x^2-5x+3)}{x^3-3x^2-4x+12}-\dfrac{3x^2+4x-7}{3x^2+13x+14}=-3$.

3. $\dfrac{16}{x^2+5x-6}-\dfrac{20}{x^2+5x+6}=1$.

4. $\dfrac{x}{x^2-3x+8}-\dfrac{x}{x^2+2x+8}=\dfrac{5}{24}$.

5. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1=0$.

6. $(x+1)^4+(x-4)^4=97$.

Карточка 5

1. $\dfrac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}=\dfrac{3}{2}$.

2. $\left(\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}-\dfrac{x+1}{3x^2+x-2}\right)\left(6x^2-x-2\right)=0$.

3. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$.

4. $\dfrac{6}{x^2-3x+2}+\dfrac{8}{x^2+3x-4}=1$.

5. $\dfrac{\left(x^2-x+1\right)^2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{49}{45}$.

6. $9x-6x^2-\dfrac{2x^2-3x-4}{2x^2-3x+1}=4$.

Карточка 6

1. $\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4}=\dfrac{(3x+2)^2}{9x^2-4}$.

2. $\dfrac{4x^2+2x+3}{2x^2+x+1}+\dfrac{2x^2+x-2}{6x^2+3x-1}=2$.

3. $0,24\left(x^2+1\right)^2+x\left(x^2-1\right)=0$.

4. $\dfrac{21}{4x+6}+\dfrac{x^2-25}{x+2}\left(\dfrac{6}{25-x^2}+\dfrac{x}{2x^2-7x-15}\right)=\dfrac{1}{2}x$.

5. $x^4+(x+4)^4=32$.

6. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}$.

Карточка 7

1. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

2. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$.

3. $\dfrac{x+4}{2x^2-4x-6}-\dfrac{x-3}{2-2x^2}=\dfrac{x+6}{x^3-3x^2-x+3}$.

4. $(x-3)^3+\dfrac{27}{x^2}(x-3)+1=\dfrac{9}{x}(x-3)^2+\dfrac{27}{x^3}$.

5. $\left(2-\dfrac{9x+1}{x^2+6x+1}\right)^2+\left(2+\dfrac{18x+2}{2x^2+3x+1}\right)^2=8$.

6. $x^4=\dfrac{11x+6}{6x+11}$.

Карточка 8

1. $7\left(\dfrac{x^2+9}{3x}\right)-2\left(\dfrac{x^4+81}{9x^2}\right)=9$.

2. $\dfrac{x^3+2x+2}{x^3+2x+3}=\dfrac{x^3+x-3}{x^3+x-2}$.

3. $\dfrac{2x+0.8}{x^2-x-20}-\dfrac{x+4}{x^2-3x-10}=\dfrac{x}{x^2+3x-4}$.

4. $x^4+x^3-9x^2-2x+2=0$.

5. $\dfrac{4x^2(43x^2+71x-602)}{(x^2+x-14)^3}=9$.

6. $x^6+1+(x-1)^6=2(x^2-x+1)$.

Решение тренировочной карточки 1

1. $\frac{5x^2-6x+1}{4x^2+5x+1}=1$; $D(У)$: $4x^2+5x+1\neq 0$ $\begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq -\frac{1}{4} \end{cases}$.

$5x^2-6x+1=4x^2+5x+1$; $x^2-11x=0$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=11 \end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\{0; 11\}$.

2. $x^3-6x+8-3x^2=0$

Сгруппируем.

$(x^3+8)-(3x^2+6x)=0$; $(x+2)(x^2-2x+4)-3x(x+2)=0$;

$(x+2)(x^2-2x+4-3x)=0$; $(x+2)(x^2-5x+4)=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-2; 1; 4\}$.

3. $x(x+1)(x+2)(x+3)=3$.

Сгруппируем.

$(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$; $x(x+3)=x^2+3x$.

Тогда уравнение представим, как

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=3$.

Обозначим $x^2+3x=t$.

Уравнение примет вид

$t^2+2t-3=0$.

$\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+3x=-3 \\ x^2+3x=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+3x+3=0;\ D<0 \\ x^2+3x-1=0 \end{array}\right.$;

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $\left\{-\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

4. $\dfrac{28x^2+42x}{x+1}=\dfrac{18x^2-33x-90}{x-4}$; $\quad D(У):\begin{cases}x\neq -1\\ x\neq 4\end{cases}$.

$18x^2-33x-90=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121+24\cdot 30}}{12}=\dfrac{11\pm\sqrt{841}}{12}$;

$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{11+29}{12}\\ x=\dfrac{11-29}{12}\end{array}\right.$; $\quad\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{10}{3}\\ x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$;

$18x^2-33x-90=18\left(x-\dfrac{10}{3}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=3(3x-10)(2x+3)$;

$\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}=\dfrac{3(3x-10)(2x+3)}{x-4}$; $\quad (2x+3)\left(\dfrac{14x}{x+1}-\dfrac{3(3x-10)}{x-4}\right)=0$.

а) $2x+3=0 \qquad x=-1{,}5\in D(У)$;

б) $\dfrac{14x}{x+1}-\dfrac{9x-30}{x-4}=0$; $\quad 14x(x-4)-(9x-30)(x+1)=0$;

$14x^2-56x-9x^2+21x+30=0$; $\quad 5x^2-35x+30=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{35\pm\sqrt{1225-600}}{10}=\dfrac{35\pm 25}{10}$; $\quad\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=1\end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\{-1{,}5\,;1\,;6\}$.

5. $\dfrac{6}{x^2+2x-3}-\dfrac{24}{x^2+2x-8}=1$

Положим $x^2+2x-3=t$, тогда $x^2+2x-8=t-5$.

Уравнение примет вид

$\dfrac{6}{t}-\dfrac{24}{t-5}=1$; $\quad D(У):\begin{cases}t\neq 0\\ t\neq 5\end{cases}$;

$6(t-5)-24t=t(t-5)$; $\quad t^2+13t+30=0$; $\quad\left[\begin{array}{l}t=-10\\ t=-3\end{array}\right.\in D(У)$;

$\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=-10\\ x^2+2x-3=-3\end{array}\right.$; $\quad\left[\begin{array}{l}x^2+2x+7=0;\ D<0\\ x^2+2x=0\end{array}\right.$; $\quad\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$.

Ответ: $\{-2;0\}$.

6. $x^3=\dfrac{55x^2-22x-8}{8x^2+22x-55}$.

Что-то подозрительно часто повторяются коэффициенты в числителе и знаменателе. Приведем уравнение к целочисленному виду.

$8x^5+22x^4-55x^3=55x^2-22x-8$;

$8x^5+22x^4-55x^3-55x^2+22x+8=0$.

Теперь понятно почему - это возвратное уравнение нечетной степени.

Значит, есть корень $x=-1$, но $8x^2+22x-55\neq 0$.

Решим $8x^2+22x-55=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121+440}}{8}=\frac{-11\pm\sqrt{561}}{8}.$$

Значит $D(У)$: $x\neq\dfrac{-11\pm\sqrt{561}}{8}$.

$$\begin{array}{l|l}
8x^5+22x^4-55x^3-55x^2+22x+8 & x+1 \\ \hline
\underline{8x^5+\ \ 8x^4} & 8x^4+14x^3-69x^2+14x+8 \\
\qquad 14x^4-55x^3 & \\
\qquad \underline{14x^4+14x^3} & \\
\qquad\qquad -69x^3-55x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{-69x^3-69x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad 14x^2+22x & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{14x^2+14x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 8x+8 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{8x+8} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Получили новое возвратное уравнение четной степени.

$8x^4+14x^3-69x^2+14x+8=0$; $\quad (:x^2)$

$8x^2+14x-69+\dfrac{14}{x}+\dfrac{8}{x^2}=0$; $\quad 8\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+14\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-69=0$.

Пусть $x+\dfrac{1}{x}=t$;

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$;

$8\left(t^2-2\right)+14t-69=0$;

$8t^2+14t-85=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+680}}{8}=\dfrac{-7\pm\sqrt{729}}{8}=\dfrac{-7\pm27}{8}$;

$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2} \\ t=-4\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$;

а) $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$;

$2x^2-5x+2=0$; $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \in D(У)$;

б) $x+\dfrac{1}{x}=-4\dfrac{1}{4}$;

$4x^2+17x+4=0$ $\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\left\{-4\,;-1\,;-\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{2}\,;2\right\}$.

Решение тренировочной карточки 2

1. $\dfrac{2x+3}{12-x-x^2}+0,5=0$; $\quad D(У)$: $12-x-x^2\neq 0$; $\begin{cases} x\neq -4 \\ x\neq 3 \end{cases}$.

$2x+3+6-0,5x-0,5x^2=0$; $4x+18-x-x^2=0$; $x^2-3x-18=0$;

$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-3 \end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\{-3\,;6\}$.

2. $(2x-1)^2(5x-3)=(x-0,6)(16x^2-4)$.

$(2x-1)^2(5x-3)-(x-0,6)\cdot 4\cdot(2x-1)(2x+1)=0$;

$(2x-1)((2x-1)\cdot 5(x-0,6)-(x-0,6)4(2x+1))=0$;

$(2x-1)(x-0,6)(10x-5-8x-4)=0$;

$(2x-1)(x-0,6)(2x-9)=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{5} \\ x=4\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{3}{5}\,;\ 4\dfrac{1}{2}\right\}$.

3. $\dfrac{2x^2+3x-20}{6x^2+20x-16}=\dfrac{6x+4}{36x^2-16}$.

а) $6x^2+20x-16=0$; $3x^2+10x-8=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{3}=\dfrac{-5\pm 7}{3}$;

$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$; $6x^2+20x-16=6(x+4)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)=2(x+4)(3x-2)$.

б) $2x^2+3x-20=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+160}}{4}=\dfrac{-3\pm 13}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=-4 \end{array}\right.$; $\qquad D(У)$: $\begin{cases} x\neq -4 \\ x\neq \dfrac{2}{3} \\ x\neq -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$2x^2+3x-20=2(x+4)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)=(x+4)(2x-5)$.

$\dfrac{(x+4)(2x-5)}{2(x+4)(3x-2)}=\dfrac{2(3x+2)}{4(3x+2)(3x-2)}$; $\quad \dfrac{2x-5}{2(3x-2)}=\dfrac{1}{2(3x-2)}$;

$2x-5=1$; $x=3\in D(У)$.

Ответ: $x=3$.

4. $\dfrac{6x^2+17x-10}{4x^2+12x-7}+\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{(3-x)(2x^2+3x-14)}=x+5$;

а) $4x^2+12x-7=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+28}}{4}=\dfrac{-6\pm 8}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$;

$4x^2+12x-7=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{7}{2}\right)=(2x-1)(2x+7)$.

б) $6x^2+17x-10=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-17\pm\sqrt{289+240}}{12}=\dfrac{-17\pm 23}{12}$; $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{10}{3} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$;

$6x^2+17x-10=6\left(x+\dfrac{10}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=(3x+10)(2x-1)$.

в) $2x^2+3x-14=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\dfrac{-3\pm 11}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$;

$2x^2+3x-14=2(x-2)\left(x+\dfrac{7}{2}\right)=(x-2)(2x+7)$;

г) $x^3-2x^2-9x+18=0$; Сгруппируем $(x^3-9x)-(2x^2-18)=0$;

$(x^3-9x)-(2x^2-18)=0$; $x(x^2-9)-2(x^2-9)=0$;

$(x^2-9)(x-2)=0$; $(x+3)(x-3)(x-2)=0$;

$\dfrac{(3x+10)(2x-1)}{(2x-1)(2x+7)}+\dfrac{(x+3)(x-3)(x-2)}{(3-x)(x-2)(2x+7)}=x+5$; $D(У)$: $\begin{cases} x\neq\dfrac{1}{2} \\ x\neq -3{,}5 \\ x\neq 2 \\ x\neq 3 \end{cases}$

$\dfrac{3x+10}{2x+7}-\dfrac{x+3}{2x+7}=x+5$;

$\dfrac{3x+10-x-3}{2x+7}=x+5$; $\dfrac{2x+7}{2x+7}=x+5$; $x+5=1$; $x=-4\in D(У)$.

Ответ: $x=-4$.

5. $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0$.

Так как это возвратное уравнение четной степени, разделим обе части уравнения на x^2.

$10x^2-29x+30-\frac{29}{x}+\frac{10}{x^2}=0$; $\quad 10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-29\left(x+\frac{1}{x}\right)+30=0$.

Пусть $x+\frac{1}{x}=t$; $\quad x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$; $\quad 10\left(t^2-2\right)-29t+30=0$;

$10t^2-29t+10=0$; $\quad t_{1,2}=\frac{29\pm\sqrt{841-400}}{20}=\frac{29\pm 21}{20}$;

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{5}{2} \\ t=\frac{2}{5} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=\frac{2}{5} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0 \\ 5x^2-2x+5=0;\ D<0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\,;\,2\right\}$.

6. $\frac{(x-1)^2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{2}{9}$.

$\frac{\left(x^2-2x+1\right)x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{2}{9}$; $\quad \frac{x^2\left(x-2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{2}{9}$.

Положим $x+\frac{1}{x}-1=t$, тогда $x+\frac{1}{x}-2=t-1$.

Уравнение примет вид:

$\frac{t-1}{t^2}=\frac{2}{9}$; $\quad 2t^2-9t+9=0$; $\quad t_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=\frac{9\pm 3}{4}$;

$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{3}{2} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}-1=3 \\ x+\frac{1}{x}-1=\frac{3}{2} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x^2-4x+1=0 \\ 2x^2-5x+2=0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \\ x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{2-\sqrt{3}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,2\,;\,2+\sqrt{3}\right\}$.

Решение тренировочной карточки 3

1. $\dfrac{2x+3}{6x^2+5x-6}+\dfrac{3x+2}{4-9x^2}=0$;

а) $6x^2+5x-6=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+4\cdot36}}{12}=\frac{-5\pm13}{12};\quad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.;\quad D(У):\ \begin{cases} x\neq\pm\dfrac{2}{3} \\ x\neq-1\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

б) $6x^2+5x-6=6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)=(2x+3)(3x-2)$;

$$\frac{2x+3}{(2x+3)(3x-2)}+\frac{3x+2}{(2-3x)(2+3x)}=0;$$

$$\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{3x-2}=0;\qquad 0=0;$$

$\forall x\in D(У)$: – есть решение.

Ответ: $\left(-\infty;-1\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-1\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};\infty\right)$ – есть решение уравнения.

2. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.

Положим $x^2-x+1=t$, тогда $x^2-x+2=t+1$;

$x^2-x=t-1$; $\quad x^2-x-2=t-3$.

$$\frac{t-1}{t}-\frac{t+1}{t-3}=1;\qquad D(У):\quad \begin{cases} t\neq0 \\ t\neq3 \end{cases};$$

$(t-1)(t-3)-t(t+1)=t(t-3)$;

$t^2-4t+3-t^2-t=t^2-3t$;

$t^2+2t-3=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.\in D(У);\quad \left[\begin{array}{l} x^2-x+1=-3 \\ x^2-x+1=1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-x+4=0\ \ D<0 \\ x^2-x=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{0;1\}$.

3. $8x^3-8x^2+1=0$;

$d=\pm1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{1}{8};\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=8\cdot\frac{1}{8}-8\cdot\frac{1}{4}+1=1-2+1=0$,

тогда

$$
\begin{array}{l|l}
8x^3-8x^2+1 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
\underline{8x^3-4x^2} & 8x^2-4x-2 \\
\quad -4x^2+1 & \\
\quad \underline{-4x^2+2x} & \\
\qquad\quad -2x+1 & \\
\qquad\quad \underline{-2x+1} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$8x^2-4x-2=0;\qquad 4x^2-2x-1=0;\qquad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1-\sqrt{5}}{4};\ \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

4. $\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x^2+x-12}-\frac{128x+365}{2x^2+13x+20}=x$;

а) $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$;

б) $x^3-9x^2+27x-27=(x-3)^3$;

в) $2x^2+13x+20=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169-160}}{4}=\frac{-13\pm3}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-\frac{5}{2} \end{array}\right.;$$

$$2x^2+13x+20=2(x+4)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(x+4)(2x+5).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{(x-3)^2}{(x+4)}-\frac{128x+365}{(x+4)(2x+5)}-x=0;\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq3 \\ x\neq-4 \\ x\neq-2{,}5 \end{cases}.$$

$$(x-3)^2(2x+5)-128x-365-x(x+4)(2x+5)=0;$$

$$\left(x^2-6x+9\right)(2x+5)-128x-365-x\left(2x^2+13x+20\right)=0;$$

$$2x^3-7x^2-12x+45-128x-365-2x^3-13x^2-20x=0;$$

$$-20x^2-160x-320=0; \quad x^2+8x+16=0; \quad x=-4\notin D(У).$$

Ответ: $\varnothing$ (решения нет).

5. $\left(\dfrac{36x^2}{5x^2+13x-6}-\dfrac{5x-2}{x+3}\right):\dfrac{11x-2}{x^2-2x-5}-\dfrac{28x-x^2}{2-5x}=5$.

$$5x^2+13x-6=0; \quad x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{10}=\frac{-13\pm17}{10}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{2}{5} \end{array}\right.;$$

$$5x^2+13x-6=5(x+3)\left(x-\frac{2}{5}\right)=(x+3)(5x-2);$$

$$\left(\frac{36x^2}{(x+3)(5x-2)}-\frac{5x-2}{x+3}\right)\cdot\frac{x^2-2x-5}{11x-2}-\frac{28x-x^2}{2-5x}=5; \quad D(У):\begin{cases} x\neq-3 \\ x\neq\dfrac{2}{5} \\ x\neq\dfrac{2}{11} \\ x^2-2x-5\neq0 \end{cases}$$

$$\frac{36x^2-(5x-2)^2}{(x+3)(5x-2)}\cdot\frac{x^2-2x-5}{11x-2}+\frac{28x-x^2}{5x-2}=5;$$

$$\frac{(6x+5x-2)(6x-5x+2)\left(x^2-2x-5\right)}{(x+3)(5x-2)(11x-2)}+\frac{28x-x^2}{5x-2}=5;$$

$$\frac{(x+2)\left(x^2-2x-5\right)+(x+3)\left(28x-x^2\right)}{(x+3)(5x-2)}=5;$$

$$\frac{x^3-2x^2-5x+2x^2-4x-10-x^3-3x^2+28x^2+84x}{(x+3)(5x-2)}=5;$$

$$\frac{25x^2+75x-10}{(x+3)(5x-2)}=5;$$

$$25x^2+75x-10=25x^2+65x-30; \quad 10x=-20; \quad x=-2\in D(У).$$

Ответ: $x=-2$.

6. $\dfrac{81x^4+135x^2+1}{27x^3+3x}=7{,}7$; $\Big|\cdot 10$ $\qquad D(У)$: $x\neq 0$;

$810x^4+1350x^2+10=77\cdot 27x^3+3\cdot 77x$;

$810x^4-2079x^3+1350x^2-231x+10=0$.

Да... Желание решать уравнение «в лоб» что-то отпало. Попробуем иначе.

$\dfrac{x^2\left(81x^2+135+\dfrac{1}{x^2}\right)}{3x^2\left(9x+\dfrac{1}{x}\right)}=7{,}7$. Ну теперь ясно,

положим $9x+\dfrac{1}{x}=t$; $\quad 81x^2+2\cdot 9x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=t^2$,

тогда $\quad 81x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-18$.

Уравнение примет вид $\dfrac{t^2-18+135}{3t}=7{,}7$.

$t^2-23{,}1t+117=0 \quad \Big|\cdot 10$; $\quad 10t^2-231t+1170=0$;

$$t_{1,2}=\frac{231\pm\sqrt{(231)^2-4\cdot 10\cdot 1170}}{20}=\frac{231\pm\sqrt{53361-46800}}{20}=\frac{231\pm\sqrt{6561}}{20};$$

$$t_{1,2}=\frac{231\pm 81}{20};\quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{78}{5} \\ t=\dfrac{15}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 9x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{78}{5} \\ 9x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{15}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 45x^2-78x+5=0 \\ 18x^2-15x+2=0 \end{array}\right.;$$

$$x_{1,2}=\frac{39\pm\sqrt{39^2-5\cdot 45}}{45};\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3} \\ x=\dfrac{1}{15} \end{array}\right.;$$

$$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{15^2-8\cdot 18}}{36};\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{1}{6} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{15};\dfrac{1}{6};\dfrac{2}{3};1\dfrac{2}{3}\right\}$.

Решение тренировочной карточки 4

1. $(x+3)^2+\frac{1}{x^2+6x+9}=2$.

$(x+3)^2+\frac{1}{(x+3)^2}-2=0$;

$\frac{(x+3)^4-2(x+3)^2+1}{(x+3)^2}=0$; $\frac{\left((x+3)^2-1\right)^2}{(x+3)^2}=0$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+3+1=0\\x+3-1=0\end{array}\right.;\\x\neq-3\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-2\end{array}\right..\\x\neq-3\end{cases}$

Ответ: $\{-4;-2\}$.

2. $\frac{(2-x)\left(2x^2-5x+3\right)}{x^3-3x^2-4x+12}-\frac{3x^2+4x-7}{3x^2+13x+14}=-3$;

а) $x^3-3x^2-4x+12=0$;

$\left(x^3-4x\right)-\left(3x^2-12\right)=0$; $x\left(x^2-4\right)-3\left(x^2-4\right)=0$;

$\left(x^2-4\right)(x-3)=0$; $(x-2)(x+2)(x-3)=0$;

б) $3x^2+13x+14=0$;

$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169-168}}{6}=\frac{-13\pm1}{6}$; $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-\frac{7}{3}\end{array}\right.$;

$3x^2+13x+14=3(x+2)\left(x+\frac{7}{3}\right)=(x+2)(3x+7)$;

в) $3x^2+4x-7=0$;

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+21}}{3}=\frac{-2\pm5}{3}$; $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{7}{3}\end{array}\right.$;

$3x^2+4x-7=(3x+7)(x-1)$;

г) $2x^2-5x+3=0$;

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm1}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.;$$

$$2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1);$$

$$\frac{(2-x)(2x-3)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x-3)}-\frac{(3x+7)(x-1)}{(x+2)(3x+7)}=-3 \qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -2 \\ x\neq 3 \\ x\neq -2\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}(2x-3+x-3)=-3;$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}=1;$$

$$x^2-3x+2=x^2-x-6;$$

$$x=4\in D(У).$$

Ответ: $x=4$.

3. $\frac{16}{x^2+5x-6}-\frac{20}{x^2+5x+6}=1$.

Пусть $x^2+5x-6=t$; $\quad x^2+5x+6=t+12$.

Уравнение приобретет вид

$$\frac{16}{t}-\frac{20}{t+12}=1; \qquad D(У):\ \begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq -12 \end{cases}$$

$$16(t+12)-20t=t(t+12);$$

$$16t+192-20t=t^2+12t;$$

$$t^2+16t-192=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-24 \\ t=8 \end{array}\right.\in D(У);\quad \left[\begin{array}{l} x^2+5x-6=-24 \\ x^2+5x-6=8 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2+5x+18=0;\ D<0 \\ x^2+5x-14=0;\ \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-7;2\}$.

4. $\dfrac{x}{x^2-3x+8}-\dfrac{x}{x^2+2x+8}=\dfrac{5}{24}$.

$\dfrac{x}{x\left(x-3+\dfrac{8}{x}\right)}-\dfrac{x}{x\left(x+2+\dfrac{8}{x}\right)}=\dfrac{5}{24}$; $\dfrac{1}{x-3+\dfrac{8}{x}}-\dfrac{1}{x+2+\dfrac{8}{x}}=\dfrac{5}{24}$.

Пусть $x-3+\dfrac{8}{x}=t$; $x+2+\dfrac{8}{x}=t+5$;

$\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+5}=\dfrac{5}{24}$; $D(У)$: $\begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq -5 \end{cases}$

$24(t+5)-24t=5t(t+5)$;

$24t+120-24t=5t(t+5)$; $5t^2+25t-120=0$

$t^2+5t-24=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=-8 \\ t=3 \end{array}\right. \in D(У)$; $\left[\begin{array}{l} x-3+\dfrac{8}{x}=-8 \\ x-3+\dfrac{8}{x}=3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+5x+8=0;\ D<0 \\ x^2-6x+8=0;\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ответ: $\{2;4\}$.

5. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1=0$; $(:x^2)$

$x^2+5x+8+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$; $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+8=0$.

Положим $x+\dfrac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

$(t^2-2)+5t+8=0$; $t^2+5t+6=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-3 \\ x+\dfrac{1}{x}=-2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+3x+1=0 \\ x^2+2x+1=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2};-1;\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. $(x+1)^4+(x-4)^4=97$.

Положим $t=\dfrac{x+1+x-4}{2}=x-1,5$.

Тогда $x=t+1,5$, и уравнение примет вид

$(t+2,5)^4+(t-2,5)^4=97$. Учитывая распределение коэффициентов, получим

$$\begin{array}{r} (t+2,5)^4= t^4+4t^3\cdot 2,5+6t^2\cdot 2,5^2+4t(2,5)^3+(2,5)^4 \\ +\\ (t-2,5)^4= t^4-4t^3\cdot 2,5+6t^2\cdot 2,5^2-4t(2,5)^3+(2,5)^4 \\ \hline \end{array}$$

$$(t+2,5)^4+(t-2,5)^4= 2t^4+0+12t^2(2,5)^2+0+2(2,5)^4$$

Значит $2t^4+75t^2+2\dfrac{625}{16}=97$;

$16t^4+600t^2+625=776$;

$16t^4+600t^2-151=0$;

$$\left(t^2\right)_{1,2}=\frac{-300\pm\sqrt{300^2+16\cdot 151}}{16}=\frac{-300\pm 4\sqrt{75^2+151}}{16}=\frac{-75\pm 76}{4};$$

$$\left[\begin{aligned} &t^2=\frac{1}{4}\\ &t^2=-\frac{151}{4}\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned} &x-1,5=\frac{1}{2}\\ &x-1,5=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned} &x=2\\ &x=1\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\{1;2\}$.

Решение тренировочной карточки 5

1. $\dfrac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}=\dfrac{3}{2}$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$2x^2-5x-3=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\dfrac{5\pm 7}{4}$;

$6x^2-10x-16=6x^2-15x-9$; $\quad 5x=7$; $\quad x=1{,}4\in D(У)$;

Ответ: $\{1,4\}$.

2. $\left(\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}-\dfrac{x+1}{3x^2+x-2}\right)\left(6x^2-x-2\right)=0$;

а) $2x^2-3x-2=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{3\pm 5}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$;

б) $3x^2+x-2=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\dfrac{-1\pm 5}{6}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$;

в) $6x^2-x-2=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\dfrac{1\pm 7}{12}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$;

$6x^2-x-2=(3x-2)(2x+1)$;

$\left(\dfrac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\dfrac{x+1}{(3x-2)(x+1)}\right)(3x-2)(2x+1)=0$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \\ x\neq -1 \\ x\neq \dfrac{2}{3}\end{cases}$

$\left(\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{3x-2}\right)(3x-2)(2x+1)=0$;

$\dfrac{(3x-2-2x-1)(3x-2)(2x+1)}{(2x+1)(3x-2)}=0$;

$x-3=0$; $\quad x=3\in D(У)$.

Ответ: $x=3$.

3. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$.

Сгруппируем: $(x+1)(x+7)\cdot(x+3)(x+5)+15=0$;

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$.

Положим $x^2+8x+7=t$, тогда $x^2+8x+15=t+8$;

$t(t+8)+15=0$; $t^2+8t+15=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+8x+7=-5 \\ x^2+8x+7=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+8x+12=0 \\ x^2+8x+10=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-2 \\ x=-4+\sqrt{6} \\ x=-4-\sqrt{6} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-4-\sqrt{6}\,;-6\,;-2\,;-4+\sqrt{6}\right\}$.

4. $\dfrac{6}{x^2-3x+2}+\dfrac{8}{x^2+3x-4}=1$; $\dfrac{6}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{8}{(x+4)(x-1)}=1$; $D(У)$: $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 2 \\ x\neq -4 \end{cases}$

$6(x+4)+8(x-2)=(x-1)(x-2)(x+4)$;

$6x+24+8x-16=(x^2-3x+2)(x+4)$;

$14x+8=x^3-3x^2+2x+4x^2-12x+8$; $x^3+x^2-24x=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+x-24=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{97}}{2} \\ x=-\dfrac{1+\sqrt{97}}{2} \end{array}\right. \in D(У).$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1+\sqrt{97}}{2}\,;0\,;\dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\right\}$.

5. $\dfrac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{49}{45}$.

Вынесем x^2 в числителе и знаменателе в левой части уравнения.

$$\left((x-1)^2=x^2-2x+1\right); \qquad \frac{x^2\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\frac{49}{45}.$$

Получим $\dfrac{\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2}{\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{49}{45}$. Положим $x+\dfrac{1}{x}=t$.

$$\frac{(t-1)^2}{(t-2)t}=\frac{49}{45}\ ; \quad 45\left(t^2-2t+1\right)=49t^2-98t; \qquad D(У):\ \begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq 2 \end{cases}.$$

$$4t^2-8t-45=0; \quad t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{4}=\frac{4\pm 14}{4}\ ; \quad \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{2} \\ t=-\frac{5}{2} \end{array}\right. \in D(У);$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{9}{2} \\ x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} \end{array}\right. ; \left[\begin{array}{l} 2x^2-9x+2=0 \\ 2x^2+5x+2=0 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{9+\sqrt{65}}{4} \\ x=\frac{9-\sqrt{65}}{4} \\ x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-2;\ \dfrac{9-\sqrt{65}}{4};\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{9+\sqrt{65}}{4}\right\}$.

6. $9x-6x^2-\dfrac{2x^2-3x-4}{2x^2-3x+1}=4$.

Положим $2x^2-3x=t$, тогда уравнение приобретет вид:

$$-3t-\frac{t-4}{t+1}=4; \qquad -3t^2-3t-t+4=4t+4\ ; \qquad D(У):\ t\neq -1.$$

$$-3t^2-3t-t+4=4t+4; \qquad 3t^2+8t=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-\frac{8}{3} \end{array}\right. \in D(У)\ ; \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x=0 \\ 2x^2-3x=-\frac{8}{3} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1{,}5 \\ 6x^2-9x+8=0;\ D<0 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{0;1{,}5\}$.

Решение тренировочной карточки 6

1. $\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4}=\dfrac{(3x+2)^2}{9x^2-4}$;

а) $3x^2+4x-4=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\dfrac{-2\pm4}{3}$; $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$; $3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$;

б) $2x^2+7x+6=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\dfrac{-7\pm1}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$;

$2x^2+7x+6=(x+2)(2x+3)$;

$\dfrac{(x+2)(2x+3)}{(x+2)(3x-2)}-\dfrac{(3x+2)^2}{(3x-2)(3x+2)}=0$; $\quad D(У)$: $\begin{cases} x\neq-2 \\ x\neq\dfrac{2}{3} \\ x\neq-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\dfrac{2x+3}{3x-2}-\dfrac{3x+2}{3x-2}=0$; $\quad 2x+3-3x-2=0$;

$x=1\in D(У)$.

Ответ: $x=1$.

2. $\dfrac{4x^2+2x+3}{2x^2+x+1}+\dfrac{2x^2+x-2}{6x^2+3x-1}=2$.

Положим $2x^2+x+1=t$, тогда

$2x^2+x-2=t-3$; $\quad 4x^2+2x+3=2t+1$; $\quad 6x^2+3x-1=3t-4$;

$\dfrac{2t+1}{t}+\dfrac{t-3}{3t-4}=2$; $\quad (2t+1)(3t-4)+t(t-3)=2t(3t-4)$;

$6t^2-8t+3t-4+t^2-3t-6t^2+8t=0$; $\quad t^2=4$; $\quad D(У)$: $\begin{cases} t\neq0 \\ t\neq\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right.\in D(У)$; $\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2+x+1=2 \\ 2x^2+x+1=-2 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-1=0; \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \end{array}\right. \\ 2x^2+x+3=0;\ D<0 \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$.

3. $0,24\left(x^2+1\right)^2+x\left(x^2-1\right)=0$; $\big|\cdot 25$ $\quad 6\left(x^4+2x^2+1\right)+25x^3-25x=0$;

$6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0\ \big|:x^2$

Это возвратное уравнение (косо-симметричное).

$6x^2+25x+12-\dfrac{25}{x}+\dfrac{6}{x^2}=0$; $\quad 6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+25\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+12=0$.

Положим $x-\dfrac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$.

$6\left(t^2+2\right)+25t+12=0$; $\ 6t^2+25t+24=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{-25\pm\sqrt{625-576}}{12}=\dfrac{-25\pm 7}{12}$;

$\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{3}{2} \\ t=-\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2} \\ x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2+3x-2=0 \\ 3x^2+8x-3=0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-3\,;-2\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{2}\right\}$.

4. $\dfrac{21}{4x+6}+\dfrac{x^2-25}{x+2}\left(\dfrac{6}{25-x^2}+\dfrac{x}{2x^2-7x-15}\right)=\dfrac{1}{2}x$;

а) $2x^2-7x-15=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+120}}{4}=\dfrac{7\pm 13}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$;

$2x^2-7x-15=(x-5)(2x+3)$;

$\dfrac{21}{2(2x+3)}+\dfrac{x^2-25}{x+2}\left(\dfrac{6}{(5+x)(5-x)}+\dfrac{x}{(x-5)(2x+3)}\right)=\dfrac{1}{2}x$;

$\dfrac{21}{2(2x+3)}+\dfrac{x^2-25}{x+2}\cdot\dfrac{-6(2x+3)+x(x+5)}{(x-5)(x+5)(2x+3)}=\dfrac{1}{2}x$; $\qquad D(У):\ \left\{\begin{array}{l} x\neq -1,5 \\ x\neq 5 \\ x\neq -5 \\ x\neq -2 \end{array}\right.$

$\dfrac{21}{2(2x+3)}+\dfrac{x^2-7x-18}{(x+2)(2x+3)}=\dfrac{1}{2}x$;

б) $x^2-7x-18=0$; $\left[\begin{array}{l}x=9\\x=-2\end{array}\right.$; $2x^2-7x-18=(x+2)(x-9)$;

$\frac{21}{2(2x+3)}+\frac{(x-9)(x+2)}{(x+2)(2x+3)}=\frac{1}{2}x$; $\frac{21}{2(2x+3)}+\frac{x-9}{2x+3}=\frac{1}{2}x$;

$\frac{21+2x-18}{2(2x+3)}=\frac{1}{2}x$; $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x$; $x=1\in D(У)$.

Ответ: $x=1$.

5. $x^4+(x+4)^4=32$. Положим $t=\frac{x+x+4}{2}=x+2$, тогда

$x=t-2$; $(t-2)^4+(t+2)^4=32$;

$$\begin{array}{rcl}&(t+2)^4 = & t^4+4t^3\cdot 2+6t^2\cdot 2^2+4t\cdot 2^3+2^4\\+&(t-2)^4 = & t^4-4t^3\cdot 2+6t^2\cdot 2^2-4t\cdot 2^3+2^4\\\hline\end{array}$$

$(t+2)^4+(t-2)^4=2t^4+12t^2\cdot 2^2+2\cdot 2^4$

$t^4+24t^2+16=16$; $t^2\left(t^2+24\right)=0$;

$t=0$; $t^2+24=0$, $\varnothing$, т. е. $x+2=0$; $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

6. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$ $\left(-\frac{2}{x(x+2)}\right)$; $D(У)$: $\left\{\begin{array}{l}x\neq 0\\x\neq -2\end{array}\right.$.

$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}-\frac{2}{x(x+2)}$; $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)^2=\frac{10}{9}-\frac{2}{x(x+2)}$;

$\left(\frac{2}{x(x+2)}\right)^2=\frac{10}{9}-\frac{2}{x(x+2)}$. Положим $\frac{2}{x(x+2)}=t$.

$t^2+t-\frac{10}{9}=0$; $9t^2+9t-10=0$; $t_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+360}}{18}=\frac{-9\pm 21}{18}$;

$\left[\begin{array}{l}t=-\frac{5}{3}\\t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\frac{2}{x(x+2)}=-\frac{5}{3}\\\frac{2}{x(x+2)}=\frac{2}{3}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}5x^2+10x+6=0;\ D<0\\2x^2+4x-6=0;\ \left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.\in D(У)\end{array}\right.$

Ответ: $\{-3;1\}$.

Решение тренировочной карточки 7

1. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

$x^3+x^2+2x+2+x^3+2x^2+x+2=2$;

$2x^3+3x^2+3x+2=0$

– это возвратное уравнение нечетной степени.

Тогда $x=-1$ – корень.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2+3x+2 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3+2x^2} & 2x^2+x+2;\ D<0 \\ x^2+3x & \\ \underline{x^2+\ x} & \\ 2x+2 & \\ \underline{2x+2} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: $x=-1$.

2. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$.

Пусть $x^2-4x+10=t$, тогда $x^2-4x+6=t-4$;

$\dfrac{21}{t}-(t-4)=0$; $D(У)$: $t\neq 0$

$t^2-4t-21=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2-4x+10=7 \\ x^2-4x+10=-3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0;\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right. \\ x^2-4x+13=0;\ D<0 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{1;3\}$.

3. $\dfrac{x+4}{2x^2-4x-6}-\dfrac{x-3}{2-2x^2}=\dfrac{x+6}{x^3-3x^2-x+3}$.

$2x^2-4x-6=0$;

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$;

$2-2x^2=2(1-x)(1+x)$;

$x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=$

$=(x-3)(x^2-1)=(x-3)(x+1)(x-1)$; $\qquad D(У)$: $\begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

$\dfrac{x+4}{2(x-3)(x+1)}+\dfrac{x-3}{2(x-1)(x+1)}=\dfrac{x+6}{(x-3)(x+1)(x-1)}$;

$(x+4)(x-1)+(x-3)(x-3)=2(x+6)$;

$x^2+3x-4+x^2+9-6x=2x+12$;

$2x^2-5x-7=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+56}}{4}=\dfrac{5\pm 9}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{2} \\ x=-1\notin D(У) \end{array}\right.$.

Ответ: $x=\dfrac{7}{2}$.

4. $(x-3)^3+\dfrac{27}{x^2}(x-3)+1=\dfrac{9}{x}(x-3)^2+\dfrac{27}{x^3}$; $\qquad D(У)$: $x\neq 0$

Перенесем все в одну сторону.

$(x-3)^3-\dfrac{9}{x}(x-3)^2+\dfrac{27}{x^2}(x-3)-\dfrac{27}{x^3}+1=0$.

Так как $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$,

$\left(x-3-\dfrac{3}{x}\right)^3+1=0$; $\quad x-3-\dfrac{3}{x}=-1$;

$x^2-2x-3=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{3;-1\}$.

5. $\left(2-\dfrac{9x+1}{x^2+6x+1}\right)^2+\left(2+\dfrac{18x+2}{2x^2+3x+1}\right)^2=8$.

$$\left(\frac{2x^2+12x+2-9x-1}{x^2+6x+1}\right)^2+\left(\frac{4x^2+6x+2+18x+2}{2x^2+3x+1}\right)^2=8;$$

$$\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2+\left(\frac{4x^2+24x+4}{2x^2+3x+1}\right)^2=8;$$

$$\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2+\left(\frac{4\left(x^2+6x+1\right)}{2x^2+3x+1}\right)^2=8; \qquad D(У):\ \begin{cases} x^2+6x+1\neq 0 \\ 2x^2+3x+1\neq 0 \end{cases}$$

Пусть $\left(\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2=t\ \ (t\geqslant 0)$.

$$t+\frac{16}{t}-8=0; \qquad t^2-8t+16=0;$$

$$(t-4)^2=0; \qquad t=4;$$

$$\left(\frac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}\right)^2=4; \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}=2 \\ \dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+6x+1}=-2 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+3x+1=2x^2+12x+2 \\ 2x^2+3x+1=-2x^2-12x-2 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{9}\in D(У) \\ 4x^2+15x+3=0 \end{array}\right.;$$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{225-48}}{8}=-\frac{-15\pm\sqrt{177}}{8}; \qquad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{15+\sqrt{177}}{8} \\ x=\dfrac{-15+\sqrt{177}}{8} \end{array}\right.\in D(У).$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{9};-\dfrac{15+\sqrt{177}}{8};\dfrac{-15+\sqrt{177}}{8}\right\}$.

6. $x^4=\dfrac{11x+6}{6x+11}$; $\qquad D(У):\quad x\neq -1\dfrac{5}{6}$

$6x^5+11x^4-11x-6=0$;

$f(1)=0$;

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5+11x^4-11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^5-6x^4} & 6x^4+17x^3+17x^2+17x+6 \\
\quad 17x^4-11x & \\
\quad \underline{17x^4-17x^3} & \\
\qquad 17x^3-11x & \\
\qquad \underline{17x^3-17x^2} & \\
\qquad\quad 17x^2-11x & \\
\qquad\quad \underline{17x^2-17x} & \\
\qquad\qquad 6x-6 & \\
\qquad\qquad \underline{6x-6} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$6x^4+17x^3+17x^2+17x+6=0$; $\quad \Big|:x^2$

$6x^2+17x+17+\dfrac{17}{x}+\dfrac{6}{x^2}=0$;

Пусть $x+\dfrac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$;

$6\left(t^2-2\right)+17t+17=0$; $\quad 6t^2+17t+5=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{-17\pm\sqrt{289-120}}{12}=\dfrac{-17\pm13}{12}$;

$\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{3} \\ t=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{3} \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} 3x^2+x+3=0;\ D<0 \\ 2x^2+5x+2=0;\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-2;-\dfrac{1}{2};1\right\}$.

Решение тренировочной карточки 8

1. $7\left(\dfrac{x^2+9}{3x}\right)-2\left(\dfrac{x^4+81}{9x^2}\right)=9$.

$7\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}\right)-2\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{9}{x^2}\right)=9$.

Положим $\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}=t$, тогда $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{9}{x^2}=t^2-2$.

Уравнение приобретет вид

$7t-2\left(t^2-2\right)=9$; $\quad 2\left(t^2-2\right)-7t+9=0$; $\quad 2t^2-7t+5=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\dfrac{7\pm 3}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2}; \\ t=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}=1 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-15x+18=0 \\ x^2-3x+9=0;\ D<0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{15+9}{4} \\ x=\dfrac{15-9}{4} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{1\dfrac{1}{2};\,6\right\}$.

2. $\dfrac{x^3+2x+2}{x^3+2x+3}=\dfrac{x^3+x-3}{x^3+x-2}$.

Выделим целую часть в левой и правой части уравнения.

$\dfrac{\left(x^3+2x+3\right)-1}{x^3+2x+3}=\dfrac{\left(x^3+x-2\right)-1}{x^3+x-2}$; $\quad 1-\dfrac{1}{x^2+2x+3}=1-\dfrac{1}{x^3+x-2}$;

$\dfrac{1}{x^3+2x+3}=\dfrac{1}{x^3+x-2}$; $\qquad D(У)$: $\begin{cases} x^3+2x+3\neq 0 \\ x^3+x-2\neq 0 \end{cases}$

Учитывая свойства пропорций, получим

$x^3+x-2=x^3+2x+3$;

$x=-5 \in D(У)$.

Ответ: $x=-5$.

3. $\frac{2x+0,8}{x^2-x-20}-\frac{x+4}{x^2-3x-10}=\frac{x}{x^2+3x-4}$;

а) $x^2-x-20=(x-5)(x+4)$;

б) $x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$;

в) $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$;

$$\frac{2x+0,8}{(x-5)(x+4)}-\frac{x+4}{(x-5)(x+2)}-\frac{x}{(x-1)(x+4)}=0; \qquad D(У): \begin{cases} x\neq 5 \\ x\neq 1 \\ x\neq -2 \\ x\neq -4 \end{cases}$$

$(2x+0,8)(x+2)(x-1)-(x+4)(x+4)(x-1)-x(x-5)(x+2)=0$;

$(2x+0,8)(x^2+x-2)-(x^2+8x+16)(x-1)-x(x^2-3x-10)=0$;

$2x^3+2x^2-4x+0,8x^2+0,8x-1,6-x^3-8x^2-16x+x^2+$

$+8x+16-x^3+3x^2+10x=0;$

$-1,2x^2-1,2x+14,4=0$;

$12x^2+12x-144=0$;

$x^2+x-12=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=-4;\ \notin D(У) \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=3$.

4. $x^4+x^3-9x^2-2x+2=0$.

$f(1)\neq 0$; $f(-1)\neq 0$; $f(2)\neq 0$; $f(-2)\neq 0$.

Значит рациональных корней нет, это не возвратное уравнение. Как же быть? Так как нам дано уравнение четвертой степени, то в принципе его можно представить в виде произведения двух уравнений второй степени.

$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=\left(b_0x^2+b_1x+b_2\right)\left(c_0x^2+c_1x+c_2\right)$,
где $a_0;\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ b_0;\ b_1;\ b_2;\ c_0;\ c_1;\ c_2\in\mathbb{Z}$

В данном случае предположим, что $b_0;\ c_0;\ b_2;\ c_2$ — положительные.

а) Так как $a_0=1$, то $b_0=1$ и $c_0=1$;

б) $a_4=2$, значит или $b_2=\pm2$ и $c_2=\pm1$, или $b_2=\pm1$ и $c_2=\pm2$, тогда

$x^4+x^3-9x^2-2x+2=\left(x^2+b_1x+2\right)\left(x^2+c_1x+1\right)$, но

$$\left(x^2+b_1x+2\right)\left(x^2+c_1x+1\right)=$$

$$=x^4+b_1x^3+2x^2+c_1x^3+b_1c_1x^2+2c_1x+x^2+b_1x+2=$$

$$=x^4+\left(b_1+c_1\right)x^3+\left(3+b_1c_1\right)x^2+\left(2c_1+b_1\right)x+2.$$

$$\begin{cases}b_1+c_1=1\\3+b_1c_1=-9\\2c_1+b_1=-2\end{cases};\quad\begin{cases}b_1+c_1=1\\b_1c_1=-12\\2c_1+b_1=-2\end{cases}.$$

Рассмотрим $\begin{cases}b_1+c_1=1\\b_1c_1=-12\end{cases}$.

По теореме, обратной теореме Виета, эта система порождает уравнение $m^2-m-12=0$.

Значит или $c_1=-3$ и $b_1=4$ или $c_1=4$ и $b_1=-3$, но $b_1+2c_1=-2$, тогда $c_1=-3$ и $b_1=4$.

Значит $x^4+x^3-9x^2-2x+2=\left(x^2+4x+2\right)\left(x^2-3x+1\right)=0$.

$$\left[\begin{array}{l}x^2+4x+2=0\\x^2-3x+1=0\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{2}\\x=-2-\sqrt{2}\\x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Так как найдены все четыре корня уравнения, то случай с отрицательными $b_0;\ c_0;\ b_2;\ c_2$ рассматривать нет смысла.

Ответ: $\left\{-2-\sqrt{2}\ ;\ -2+\sqrt{2}\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5. $\dfrac{4x^2\left(43x^2+71x-602\right)}{\left(x^2+x-14\right)^3}=9$.

Преобразуем уравнение, вынесем в числителе и знаменателе x^3:

$\dfrac{4x^3\left(43x+71-\frac{602}{x}\right)}{x^3\left(x+1-\frac{14}{x}\right)^3}=9$. Так как $602=43\cdot 14$ и $71=43+28$,

то $\dfrac{4\left(43\left(x-\frac{14}{x}\right)+43+28\right)}{\left(x-\frac{14}{x}+1\right)^3}=9$.

Пусть $x-\dfrac{14}{x}+1=t$, тогда уравнение примет вид

$\dfrac{4(43t+28)}{t^3}=9$; $9t^3-172t-112=0$;

$f(-4)=-9\cdot 64+172\cdot 4-112=0$;

$$\begin{array}{l|l}
9t^3-172t-112 & t+4 \\ \cline{2-2}
\underline{9t^3+36t^2} & 9t^2-36t-28 \\
\quad -36t^2-172t & \\
\quad \underline{-36t^2-144t} & \\
\qquad -28t-112 & \\
\qquad \underline{-28t-112} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$9t^2-36t-28=0$; $t_{1,2}=\dfrac{18\pm\sqrt{324+252}}{9}=\dfrac{18\pm 24}{9}$; $\left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{14}{3} \end{array}\right.$;

а) $t=-4$; $x-\dfrac{14}{x}+1=-4$; $x^2+5x-14=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2 \end{array}\right.$;

б) $t=-\dfrac{2}{3}$; $x-\dfrac{14}{x}+1=-\dfrac{2}{3}$; $3x^2+5x-42=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+504}}{6}=\frac{-5\pm 23}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\dfrac{14}{3}; \end{array}\right.$$

в) $t=\frac{14}{3}$; $\quad x-\frac{14}{x}+1=\frac{14}{3}$; $\quad 3x^2-11x-42=0$;

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121+504}}{6}=\frac{11\pm 25}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-\dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-7;-4\frac{2}{3};-2\frac{1}{3};2;3;6\right\}$.

6. $x^6+1+(x-1)^6=2\left(x^2-x+1\right)$.

$(x-1)^6=x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$, тогда

$x^6+1+x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1-2x^2+2x-2=0$;

$2x^6-6x^5+15x^4-20x^3+13x^2-4x=0$;

а) $x=0$.

б) $2x^5-6x^4+15x^3-20x^2+13x-4=0$; $\quad f(1)=2-6+15-20+13-4=0$,

тогда

$$\begin{array}{l|l} 2x^5-6x^4+15x^3-20x^2+13x-4 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^5-2x^4} & 2x^4-4x^3+11x^2-9x+4 \\ \quad -4x^4+15x^3 & \\ \quad \underline{-4x^4+4x^3} & \\ \qquad 11x^3-20x^2 & \\ \qquad \underline{11x^3-11x^2} & \\ \qquad\quad -9x^2+13x & \\ \qquad\quad \underline{-9x^2+9x} & \\ \qquad\qquad 4x-4 & \\ \qquad\qquad \underline{4x-4} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Положим $\varphi(x)=2x^4-4x^3+11x^2-9x+4$.

$\varphi(1) \neq 0$; $\varphi(4) \neq 0$; $\varphi(-1) \neq 0$; $\varphi(-4) \neq 0$;

$\varphi(2) \neq 0$; $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$; $\varphi(-2) \neq 0$; $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$.

Значит, рациональных корней нет.

Известно, что многочлен четвертой степени можно представить, как произведение квадратных трехчленов.

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = \left(b_0x^2 + b_1x + b_2\right)\left(c_0x^2 + c_1x + c_2\right),$$

где a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; b_0; b_1; b_2; c_0; c_1; $c_2 \in \mathbb{Z}$.

В данном случае, так как

$a_0 = 2$ и $a_4 = 4$ рискнем предположить, что

$$2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4 = \left(2x^2 + b_1x + 1\right)\left(x^2 + c_1x + 4\right).$$

Возможность возможностью, но надо чтобы это было технически осуществимо.

$$\left(2x^2 + b_1x + 1\right)\left(x^2 + c_1x + 4\right) =$$

$$= 2x^4 + b_1x^3 + x^2 + 2c_1x^3 + b_1c_1x^2 + c_1x + 8x^2 + 4b_1x + 4 = 0;$$

$$2x^4 + \left(b_1 + 2c_1\right)x^3 + \left(9 + b_1c_1\right)x^2 + \left(c_1 + 4b_1\right)x + 4 = 0;$$

$$\begin{cases} b_1 + 2c_1 = -4 \\ 9 + b_1c_1 = 11 \\ c_1 + 4b_1 = -9 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1 + 2c_1 = -4 \\ 4b_1 + c_1 = -9 \end{cases}; \quad \begin{matrix} b_1 = -2 \\ c_1 = -1 \end{matrix}.$$

Это подходит и для $9 + b_1c_1 = 11$. Итак нам повезло.

$$2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4 = \left(2x^2 - 2x + 1\right)\left(x^2 - x + 4\right).$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 2x + 1 = 0;\ D < 0 \\ x^2 - x + 4 = 0;\ D < 0 \end{array}\right.$. Ответ: $\{0; 1\}$.

Примечание. Можно проще.

Так как $2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 4 = 2\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) + 9x^2 - 9x + 4 =$

$= 2\left(x^2 - x\right)^2 + 9x^2 - 9x + 4 > 0 \quad \forall x \quad \left(9x^2 - 9x + 4 > 0 \quad \forall x\right)$,

то других корней, кроме найденных, нет.

Зачетные карточки

Карточка 1

1. $\frac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}=\frac{3x^2+4x-4}{1-x}$.

2. $\frac{\left(x^2+3x\right)^2-2x^2-6x-8}{x^4-5x^2+4}-\frac{4x^2+16x+16}{x^3+2x^2-4x-8}=3$.

3. $8x^3+4x^2-10x+3=0$.

4. $\frac{5}{x^2+10x+25}-\frac{7}{x^2+3x-10}=\frac{4}{4-x^2}$.

5. $\frac{4x+5}{4x^2+13x+10}=2x+3$.

6. $\frac{2x}{2x^2+5x+3}+\frac{13x}{2x^2-x+3}+6=0$.

Карточка 2

1. $\frac{2x-1}{4x^2+4x-3}=\frac{2x-3}{9-4x^2}+2x+4$.

2. $\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}+\frac{x-6}{x-2}$.

3. $\frac{x^2+x}{x^2+x+1}-\frac{x^2+x+2}{x^2+x-2}=1$.

4. $31\left(2x+\frac{1}{2x}\right)-5\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}\right)=36$.

5. $\frac{4x+6}{x+2}-\frac{5x-30}{3x^2-10x-8}:\left(\frac{4(x+4)}{3x^2-10x-8}-\frac{3x+2}{x^2-16}\right)=1$.

6. $x^4-10x^3+90x-81=0$.

Карточка 3

1. $\dfrac{4x^2+13x+10}{4x+5}=\dfrac{1}{2x+3}$.

2. $\dfrac{8x^2-22x+15}{4x-15}\left(\dfrac{16x-24}{16x^2-48x+35}+\dfrac{9}{8x^2-46x+56}+\dfrac{9}{42x-40-8x^2}\right)=2x+3$.

3. $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)(x+4)(x+6)=12$.

4. $\dfrac{4\left(x^2+1\right)}{x^2-10x+1}-\dfrac{5x}{x^2+1}+3,5=0$.

5. $x^3+\dfrac{55x^2+22x-8}{8x^2-22x-55}=0$.

6. $(x+1)^5+(x-3)^5=242(x-1)$.

Карточка 4

1. $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4x-12}-\dfrac{178x+748}{2x^2+19x+42}=x$.

2. $x^2(2x-1)+x\left(x^2-1\right)=2(x+1)^2$.

3. $\left(2x^2+3x-1\right)^2-5\left(2x^2+3x+3\right)+24=0$.

4. $\dfrac{24}{x^2+2x}=\dfrac{12}{x^2+x}+x^2+x$.

5. $\left(\dfrac{9-2x}{x^2+x-42}+\dfrac{x-6}{2x^2+5x-63}\right)\left(\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{6}{x-3}\right)=1$.

6. $x^6+1+(x+1)^6=2\left(x^2+x+1\right)^3$.

Карточка 5

1. $(x^2+2x-1)(2x^2+4x-1)=10$.

2. $\dfrac{6x^6-11x^5+11}{x}=11x+\dfrac{11}{x}-6$.

3. $\dfrac{4x^2+10x+9}{2x^2+5x+4}+\dfrac{2x^2+5x+1}{6x^2+15x+8}=2$.

4. $\dfrac{6}{x^2-3x-4}+\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}=\dfrac{x}{x+1}$.

5. $x^2+\dfrac{36x^2}{(x+6)^2}=13$.

6. $(x-1)^4+(x+4)^4=97$.

Карточка 6

1. $\dfrac{x^2+2x-15}{x-2}=\dfrac{48}{8-x^3}$.

2. $4x^3-21x+10=0$

3. $\dfrac{3x(7x^2-92x-147)(7x^2-20x-147)}{(x^2-8x-21)^3}=-10$.

4. $\left(\dfrac{9}{2x^2-11x+5}+\dfrac{9}{5+9x-2x^2}+\dfrac{8x}{4x^2-1}\right)\cdot\dfrac{2x^2+x}{2x-9}-\dfrac{10}{x-5}=2$.

5. $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.

6. $(x+1)^5+(5-x)^5=1056$.

Карточка 7

1. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

2. $\left(x^2-x+1\right)^4-10x^2\left(x^2-x+1\right)^2+9x^4=0$.

3. $\left(x^2-6x-9\right)^2=x^3-4x^2-9x$.

4. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-4}+\frac{6}{x-5}=0$. $x\in\mathbb{Z}$

5. $x^4-x^3-9x^2+2x+2=0$.

6. $1+\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{5}{x^2}$.

Карточка 8

1. $\frac{3x^2+30x+75}{x^3+5x^2-25x-125}-\frac{x^4-10x^2+9}{\left(x^2-4x\right)^2-2x^2+8x-15}=2$.

2. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}$.

3. $x^2+\frac{66\left(x^2-610\right)}{(x+26)^2}=15$.

4. $\frac{(x-1)^4+(x-3)^4}{4{,}1}=\left(x-1-\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(x-3+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3$.

5. $\frac{\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{49}{45}$.

6. $12x^6+52x^5-13x^4-156x^3-13x^2+52x+12=0$.

7 Решения

Решение проверочной работы 1

1. $5(x+3)-4(3-2x)+3(4-5x)=2(4x-5)$;

$5x+15-12+8x+12-15x=8x-10$; $-10x=-25$; $x=2{,}5$.

Ответ: $x=2{,}5$.

2. $\frac{x+1}{4}-\frac{2x-3}{3}=5 \quad \Big|\cdot 12$; $3(x+1)-4(2x-3)=5\cdot 12$;

$3x+3-8x+12=60$; $-5x=60-15$; $-5x=45$; $x=-9$.

Ответ: $x=-9$.

3. $\frac{1-x}{4}-\frac{2(2x+1)}{5}=1\frac{1}{4} \quad \Big|\cdot 20$; $5(1-x)-8(2x+1)=5\cdot 5$;

$5-5x-16x-8=25$; $-21x=28$; $3x=-4$; $x=-1\frac{1}{3}$.

Ответ: $x=-1\frac{1}{3}$.

4. $\frac{3(3x-2)}{4}-\frac{2(2x+1)}{3}=1\frac{1}{4}$; $\frac{9(3x-2)-8(2x+1)}{12}=\frac{5}{4} \quad \Big|\cdot 12$;

$27x-18-16x-8=15$; $11x=15+26$; $x=\frac{41}{11}$; $x=3\frac{8}{11}$.

Ответ: $x=3\frac{8}{11}$.

5. $\frac{2(2x-1)-3}{3}-\frac{3-2x}{2}=5$; $\quad 2\big(2(2x-1)-3\big)-3(3-2x)=5\cdot 6$;

$4(2x-1)-6-9+6x=30$; $\quad 8x-4-15+6x=30$;

$14x=49$; $\quad x=\frac{49}{14}$; $\quad x=\frac{7}{2}$; $\quad x=3{,}5$.

Ответ: $x=3{,}5$.

6. $3{,}2(3x+0{,}3)-2\frac{2}{7}(0{,}2-3x)=-1$;

$9{,}6x+0{,}96-\frac{16}{7}\cdot\frac{1}{5}+\frac{16}{7}\cdot 3x=-1 \quad \big|\cdot 35$;

$9{,}6\cdot 35x+0{,}96\cdot 35-16+16\cdot 5\cdot 3x=-35$;

$336x+33{,}6-16+240x=-35$; $\quad 576x=-35-17{,}6$; $\quad 576x=-52{,}6$;

$x=-\frac{526}{5760}$; $\quad x=-\frac{263}{2880}$.

Ответ: $x=-\frac{263}{2880}$.

7. $\frac{4{,}2-0{,}3(5x+1)}{3}-\frac{3{,}2-1{,}2(2-3x)}{4}=1 \ \big|\cdot 10$; $\quad \frac{42-3(5x+1)}{3}-\frac{32-12(2-3x)}{4}=10$;

$14-(5x+1)-\big(8-3(2-3x)\big)=10$; $\quad 14-5x-1-8+3(2-3x)=10$;

$-5x+5+6-9x=10$; $\quad -14x=-1$; $\quad x=\frac{1}{14}$.

Ответ: $x=\frac{1}{14}$.

8. $\frac{1{,}5-1{,}8(2x-1)}{0{,}6}-\frac{0{,}4-1{,}5(3+4x)}{1{,}8}=5$;

$\frac{10\big(1{,}5-1{,}8(2x-1)\big)}{10\cdot 0{,}6}-\frac{10\big(0{,}4-1{,}5(3+4x)\big)}{10\cdot 1{,}8}=5$;

$\frac{15-18(2x-1)}{6}-\frac{4-15(3+4x)}{18}=5 \quad \big|\cdot 18$;

$3(15-36x+18)-4+15(3+4x)=5\cdot 18$;

$99-108x-4+45+60x=90$; $\quad -48x=90-140$; $\quad -48x=-50$;

$x=\frac{50}{48}$.

Ответ: $x=1\frac{1}{24}$.

9. $3x-\left(4x-3\left(2x-1\right)\right)=-14$; $\quad 3x-\left(4x-6x+3\right)=-14$;

$3x-\left(-2x+3\right)=-14$; $\quad 3x+2x-3=-14$; $\quad 5x=-11$.

Ответ: $x=-2,2$.

10. $-0,5\left(2x+3\right)+0,1\left(x-3\right)=0,4\left(1-2x\right)-3 \quad \Big|\cdot 10$;

$-5\left(2x+3\right)+1\cdot\left(x-3\right)=4\left(1-2x\right)-30$; $\quad -9x+8x=-26+18$;

$-x=-8$; $\quad x=8$.

Ответ: $x=8$.

11. $\dfrac{(3x-1)\cdot 0{,}4-3}{(5x+3)\cdot 0{,}7-0{,}6\left(6x-\frac{1}{6}\right)}=3$; $\quad \dfrac{10\left(0{,}4(3x-1)-3\right)}{10\left(0{,}7(5x+3)-0{,}6\left(6x-\frac{1}{6}\right)\right)}=3$;

$\dfrac{4(3x-1)-30}{7(5x+3)-6\left(6x-\frac{1}{6}\right)}=3$; $\quad \dfrac{12x-4-30}{35x+21-36x+1}=3$;

$\dfrac{12x-34}{22-x}=3$; $\qquad D(У)$: $22-x\neq 0$; $\quad x\neq 22$

$12x-34=3\left(22-x\right)$; $\quad 12x-34=66-3x$; $\quad 15x=100$;

$x=\dfrac{100}{15}$; $\quad x=6\dfrac{2}{3}\in D\left(У\right)$.

Ответ: $x=6\dfrac{2}{3}$.

12. $\dfrac{3x+1-2(4-3x)}{6(2x-1)-7(3x-2)-1}=-1$; $\quad \dfrac{3x+1-8+6x}{12x-6-21x+14-1}=-1$;

$\dfrac{9x-7}{-9x+7}=-1$; $\qquad D(У)$: $-9x+7\neq 0$; $\quad x\neq\dfrac{7}{9}$

$9x-7=9x-7$; $\quad 0=0$.

Любое $x\in D\left(У\right)$ – решение.

Ответ: $\forall x\neq\dfrac{7}{9}$ – есть решение

или $x\in\left(-\infty;\dfrac{7}{9}\right)\cup\left(\dfrac{7}{9};\infty\right)$.

Решение проверочной работы 2

1. $4(2x-3)-3(2x+1)+2(3x+1)=-1$; $8x-12-6x-3+6x+2=-1$;

$8x=-1+13$; $8x=12$; $x=\frac{12}{8}$; $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $x=1\frac{1}{2}$.

2. $\frac{2(x+2)-3(x-1)}{3(x+1)-4(x-1)}=1$; $\frac{2x+4-3x+3}{3x+3-4x+4}=1$;

$\frac{7-x}{-x+7}=1$; $D(У)$: $-x+7\neq 0$; $x\neq 7$

После сокращения получим $1=1$ – истина, значит $\forall x\in D(У)$ – есть решение.

Ответ: $\forall x\neq 7$ или $(-\infty;\ 7)\cup(7;\ \infty)$.

3. $\frac{1{,}4(x-1)+1{,}2(3-x)}{2{,}1(x+2)-0{,}7(x-3)}=2$; $\frac{10(1{,}4(x-1)+1{,}2(3-x))}{10(2{,}1(x+2)-0{,}7(x-3))}=2$;

$\frac{14(x-1)+12(3-x)}{21(x+2)-7(x-3)}=2$; $\frac{14x-14+36-12x}{21x+42-7x+21}=2$;

$D(У)$: $14x+63\neq 0$; $2x+9\neq 0$; $x\neq -4{,}5$

$2x+22=28x+126$; $-26x=104$; $x=-4\in D(У)$.

Ответ: $x=-4$.

4. $(2x-3)(5x+1)-5x(2x+3)+16x=3$;

$10x^2-15x+2x-3-10x^2-15x+16x=3$; $-12x=6$; $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

5. $4x^2-(x-2)(4x+3)=16$;

$4x^2-(4x^2-8x+3x-6)=16$; $4x^2-4x^2+5x+6=16$;

$5x=10$; $x=2$.

Ответ: $x=2$.

6. $\dfrac{(4x-1)(x+2)-(2x+1)(2x-1)-4(x-1)}{2x^2-(2x+1)(x-2)}=1$;

$\dfrac{4x^2-x+8x-2-\left(4x^2-1\right)-4x+4}{2x^2-\left(2x^2-3x-2\right)}=1$; $\dfrac{4x^2+7x-2-4x^2+1-4x+4}{2x^2-2x^2+3x+2}=1$;

$\dfrac{3x+3}{3x+2}=1$; $D(У)$: $3x+2\neq 0$; $x\neq -\dfrac{2}{3}$

$3x+3=3x+2$;

$1=0$ – ложь.

Ответ: $x\in\varnothing$.

7. $(12x-5)^2-(8x+1)^2-(7-10x)(3-8x)=78$.

$144x^2-120x+25-\left(64x^2+16x+1\right)-\left(21-30x-56x+80x^2\right)=78$;

$144x^2-120x+25-64x^2-16x-1-21+86x-80x^2=78$;

$-50x=75$; $x=-\dfrac{75}{50}$; $x=-1{,}5$.

Ответ: $x=-1{,}5$.

8. $\dfrac{(13x-1)^2-(12x+3)^2}{(4x+5)^2-41(x-1)(x+1)}=-1$;

$\dfrac{169x^2-26x+1-\left(144x^2+72x+9\right)}{16x^2+40x+25-41\left(x^2-1\right)}=-1$; $\dfrac{169x^2-26x+1-144x^2-72x-9}{16x^2+40x+25-41x^2+41}=-1$;

$\dfrac{25x^2-98x-8}{-25x^2+40x+66}=-1$; $D(У)$: $-25x^2+40x+66\neq 0$

$25x^2-98x-8=25x^2-40x-66$; $-58x=-58$; $x=1$.

Выясним $1\in D(У)$ или нет.

Пусть $y(x)=-25x^2+40x+66$,

тогда $y(1)=-25+40+66\neq 0$.

Значит $1\in D(У)$.

Ответ: $x=1$.

9. $(5x-1)^2(x+1)-(6-5x)^2(x+3)=28$.

$(25x^2-10x+1)(x+1)-(36-60x+25x^2)(x+3)=28$;

$25x^3-10x^2+x+25x^2-10x+1-(36x-60x^2+25x^3+108-180x+75x^2)=28$;

$25x^3+15x^2-9x+1-25x^3-15x^2+144x-108=28$;

$135x=135$; $x=1$.

Ответ: $x=1$.

10. $(x-1)(x+2)(3-2x)-2(x+1)(x-2)(3-x)=(7x-1)(1-x)$;

а) $(x-1)(x+2)(3-2x)=(x^2+x-2)(3-2x)=$

$=3x^2+3x-6-2x^3-2x^2+4x=-2x^3+x^2+7x-6$;

б) $(x+1)(x-2)(3-x)=(x^2-x-2)(3-x)=$

$=3x^2-3x-6-x^3+x^2+2x=-x^3+4x^2-x-6$;

в) $(7x-1)(1-x)=7x-1-7x^2+x=-7x^2+8x-1$.

Тогда уравнение примет вид:

$-2x^3+x^2+7x-6-2(-x^3+4x^2-x-6)=-7x^2+8x-1$;

$-2x^3+x^2+7x-6+2x^3-8x^2+2x+12=-7x^2+8x-1$;

$9x-8x=-1-6$; $x=-7$.

Ответ: $x=-7$.

Решение проверочной работы 3

1. $2x+1+\dfrac{2x-1}{6}=\dfrac{7x-13}{4}\quad\Big|\cdot 12$; $\quad 12(2x+1)+2(2x-1)=3(7x-13)$;

$24x+12+4x-2=21x-39$; $\quad 7x=-49$; $\quad x=-7$.

Ответ: $x=-7$.

2. $\dfrac{3(2x-2{,}5)}{5}-2x+2{,}5=\dfrac{2-x}{2}\quad\Big|\cdot 10$;

$6(2x-2{,}5)-20x+25=5(2-x)$; $\quad 12x-15-20x+25=10-5x$;

$-8x+5x=0$; $\quad 3x=0$; $\quad x=0$.

Ответ: $x=0$.

3. $\dfrac{(2x-1)^2}{8}-\dfrac{x(2x-3)}{4}=\dfrac{1+0{,}25x}{12}\quad\Big|\cdot 24$;

$3(2x-1)^2-6x(2x-3)=2(1+0{,}25x)$;

$3(4x^2-4x+1)-12x^2+18x=2+0{,}5x$;

$12x^2-12x+3-12x^2+18x=2+0{,}5x$; $\quad 6x-0{,}5x=2-3$;

$5{,}5x=-1$; $\quad x=-\dfrac{1}{5{,}5}$; $\quad x=-\dfrac{10}{55}$; $\quad x=-\dfrac{2}{11}$.

Ответ: $x=-\dfrac{2}{11}$.

4. $\dfrac{\left(x+1\frac{1}{3}\right)^2}{4}+\dfrac{1{,}5x(1-x)}{9}=\dfrac{(x-4)(x+4)}{12}\quad\Big|\cdot 36$;

$9\left(x+1\dfrac{1}{3}\right)^2+4\cdot 1{,}5x(1-x)=3\left(x^2-16\right)$;

$\left(3\left(x+1\dfrac{1}{3}\right)\right)^2+6x(1-x)=3x^2-48$;

$(3x+4)^2+6x-6x^2-3x^2=-48$; $\quad 9x^2+24x+16+6x-9x^2=-48$;

$30x=-64$; $\quad x=-\dfrac{64}{30}$; $\quad x=-2\dfrac{4}{30}$; $\quad x=-2\dfrac{2}{15}$.

Ответ: $x=-2\dfrac{2}{15}$.

5. $(3x+2)(3x-2)-(3x-4)^2=28$; $9x^2-4-\left(9x^2-24x+16\right)=28$;

$9x^2-4-9x^2+24x-16=28$; $24x=28+20$; $24x=48$; $x=2$.

Ответ: $x=2$.

6. $(2x-1)\left(1+2x+4x^2\right)-4x\left(2x^2-3\right)=23$;

$(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)-8x^3+12x=23$; $8x^3-1-8x^3+12x=23$;

$12x=24$; $x=2$.

Ответ: $x=2$.

7. $\frac{x}{x-1}=\frac{4x}{x+5}-3$; $D(У)$: $\begin{cases} x-1\neq 0 \\ x+5\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -5 \end{cases}$

$\frac{x^{\lfloor x+5}}{x-1}-\frac{4x^{\lfloor x-1}}{x+5}+3^{\lfloor (x-1)(x+5)}=0$; $\frac{x(x+5)-4x(x-1)+3(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+5)}=0$;

$x^2+5x-4x^2+4x+3\left(x^2-x+5x-5\right)=0$;

$-3x^2+9x+3x^2+12x-15=0$; $21x=15$; $x=\frac{15}{21}$; $x=\frac{5}{7}\in D(У)$.

Ответ: $x=\frac{5}{7}$.

8. $\frac{1{,}5x^2}{9x^2-1}-\frac{3x+1}{3-9x}-\frac{3x-1}{6x+2}=0$; $\frac{1{,}5x^2}{(3x-1)(3x+1)}-\frac{3x+1}{3(1-3x)}-\frac{3x-1}{2(3x+1)}=0$;

$\frac{1{,}5x^{2\lfloor 6}}{(3x-1)(3x+1)}+\frac{3x+1^{\lfloor 2(3x+1)}}{3(3x-1)}-\frac{3x-1^{\lfloor 3(3x-1)}}{2(3x+1)}=0$;

$\frac{6\cdot 1{,}5x^2+2(3x+1)^2-3(3x-1)^2}{6(3x-1)(3x+1)}=0$; $\frac{9x^2+2(3x+1)^2-3(3x-1)^2}{6(3x-1)(3x+1)}=0$;

$\frac{9x^2+2\left(9x^2+6x+1\right)-3\left(9x^2-6x+1\right)}{6(3x-1)(3x+1)}=0$;

$\frac{9x^2+18x^2+12x+2-27x^2+18x-3}{6(3x-1)(3x+1)}=0$; $\frac{30x-1}{6(3x-1)(3x+1)}=0$;

$$\begin{cases} 30x-1=0 \\ 6(3x-1)(3x+1)\neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{30} \\ 6\left(\dfrac{1}{10}-1\right)\left(\dfrac{1}{10}+1\right)\neq 0 - \text{истина}. \end{cases}$$

Ответ: $x=\dfrac{1}{30}$.

9. $(x-2)^{|2+x}+\dfrac{4}{2+x}-\dfrac{x^3+6}{x^2+2x}=0$; $\quad \dfrac{(2+x)(x-2)+4}{2+x}-\dfrac{x^3+6}{x(x+2)}=0$;

$\dfrac{x^{2|x}}{x+2}-\dfrac{x^3+6}{x(x+2)}=0$; $\quad \dfrac{x^3-(x^3+6)}{x(x+2)}=0$; $\quad \dfrac{x^3-x^3-6}{x(x+2)}=0$;

$-6=0$ – ложь.

Ответ: $x\in\varnothing$ (решения нет).

10. $\dfrac{x+3}{(2x+3)(2x-3)}-\dfrac{3-x}{(2x+3)^2}=\dfrac{1}{2x-3}$;

$$\frac{x+3^{|2x+3}}{(2x+3)(2x-3)}-\frac{3-x^{|2x-3}}{(2x+3)^2}-\frac{1^{|(2x+3)^2}}{2x-3}=0;$$

$$\frac{(2x+3)(x+3)-(3-x)(2x-3)-(2x+3)^2}{(2x+3)^2(2x-3)}=0;$$

$$\frac{2x^2+9x+9-(6x-2x^2-9+3x)-(4x^2+12x+9)}{(2x+3)^2(2x-3)}=0;$$

$$\frac{2x^2+9x+9+2x^2-9x+9-4x^2-12x-9}{(2x+3)^2(2x-3)}=0; \quad \frac{9-12x}{(2x+3)^2(2x-3)}=0;$$

$$\begin{cases} 9-12x=0 \\ (2x+3)^2(2x-3)\neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ \left(\dfrac{3}{2}+3\right)^2\left(\dfrac{3}{2}-3\right)\neq 0 - \text{истина} \end{cases}; \quad x=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $x=\dfrac{3}{4}$.

11. $\dfrac{7-18x}{x^3+1}+\dfrac{15}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{1-x^2}$.

$$\frac{7-18x^{\lfloor 1-x}}{x^3+1}+\frac{15^{\lfloor (x+1)(1-x)}}{x^2-x+1}-\frac{3^{\lfloor x^2-x+1}}{1-x^2}=0\,;$$

$$\frac{(1-x)(7-18x)+15(x+1)(1-x)-3\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)(1-x)}=0\,;$$

$$\frac{7-7x-18x+18x^2+15\left(1-x^2\right)-3x^2+3x-3}{(x+1)(1-x)\left(x^2-x+1\right)}=0\,;$$

$$\frac{4-22x+15x^2+15-15x^2}{(x+1)(1-x)\left(x^2-x+1\right)}=0\,;\quad \frac{-22x+19}{(x+1)(1-x)\left(x^2-x+1\right)}=0\,;$$

$$\begin{cases}-22x+19=0\\(x+1)(1-x)\left(x^2-x+1\right)\neq 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{19}{22}\\ \left(\dfrac{19}{22}+1\right)\left(\dfrac{19}{22}-1\right)\left(\left(\dfrac{19}{22}\right)^2-\dfrac{19}{22}+1\right)\neq 0\end{cases} \text{ — истина.}$$

Ответ: $x=\dfrac{19}{22}$.

12. $\dfrac{2x-1}{2x+2}\cdot\left(\dfrac{2x}{1-4x+4x^2}-\dfrac{4x^2+2x}{8x^3-1}\right)=\dfrac{2x}{8x^3-1}$;

$$(a-b)^2=(b-a)^2\,;$$

$$\frac{2x-1}{2x+2}\cdot\left(\frac{2x^{\lfloor 4x^2+2x+1}}{(1-2x)^2}-\frac{4x^2+2x^{\lfloor 2x-1}}{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}\right)-\frac{2x}{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}=0\,;$$

$$\frac{2x-1}{2(x+1)}\cdot\frac{2x\left(4x^2+2x+1\right)-(2x-1)2x(2x+1)}{(2x-1)^2\left(4x^2+2x+1\right)}-\frac{2x}{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}=0\,;$$

$$\frac{2x-1}{2(x+1)}\cdot\frac{8x^3+4x^2+2x-2x\left(4x^2-1\right)}{(2x-1)^2\left(4x^2+2x+1\right)}-\frac{2x}{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}=0;$$

$$\frac{(2x-1)\left(8x^3+4x^2+2x-8x^3+2x\right)}{2(x+1)(2x-1)^2\left(4x^2+2x+1\right)}-\frac{2x}{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}=0;$$

$$\frac{4x^2+4x}{2(x+1)(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}-\frac{2x^{\underline{|2(x+1)}}}{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}=0;$$

$$\frac{4x^2+4x-4x^2-4x}{2(x+1)(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}=0;$$

$\dfrac{0}{2(x+1)(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}=0$, т. е. любое $x\in D(У)$.

Значит надо выяснить, когда есть решение.

$$\begin{cases}x+1\neq 0\\ 2x-1\neq 0\\ 4x^2+2x+1\neq 0\end{cases};\qquad \begin{cases}x\neq -1\\ x\neq \dfrac{1}{2}\\ 4x^2+2\cdot 2x\cdot\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1\neq 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}x\neq -1\\ x\neq \dfrac{1}{2}\\ \left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\neq 0 \text{ — истина}\end{cases}\quad \text{т. е. } \begin{cases}x\neq -1\\ x\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

$4x^2+2x+1=\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ — называется выделением полного квадрата.

Ответ: любое $\begin{cases}x\neq -1\\ x\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$ — есть решение или

$(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$ — есть решение.

Ответы к проверочным карточкам заданий на решение простейших квадратных уравнений

Карточка 1

1. $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right\}$
2. $\left\{-\frac{3}{2};\ \frac{2}{3}\right\}$
3. $\left\{-\frac{1}{3};\ 3\frac{1}{2}\right\}$
4. $\left\{\frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right\}$
5. $\{-3;\ 1{,}5\}$
6. $\left\{\frac{1}{5};\ 1\frac{1}{3}\right\}$
7. $\{-2{,}5;\ 2\}$
8. $\left\{-\frac{3}{4};\ \frac{1}{3}\right\}$
9. $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{5}{6}\right\}$
10. $\left\{-\frac{1}{2};\ 2\frac{2}{3}\right\}$

Карточка 2

1. $\left\{-\frac{2}{3};\ 1\frac{1}{2}\right\}$
2. $\left\{-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4}\right\}$
3. $\left\{-\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right\}$
4. $\left\{-3\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right\}$
5. $\left\{-1\frac{1}{3};\ -\frac{1}{5}\right\}$
6. $\{-1{,}5;\ 3\}$
7. $\left\{-\frac{5}{6};\ -\frac{1}{3}\right\}$
8. $\{-2;\ 2{,}5\}$
9. $\left\{-2\frac{2}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$
10. $\left\{-\frac{1}{4};\ \frac{2}{3}\right\}$

Карточка 3

1. $\left\{-2\,;\ 1\frac{1}{3}\right\}$

2. $\left\{\frac{2}{3}\,;\ 1\frac{1}{2}\right\}$

3. $\left\{-\frac{2}{7}\,;\ 3\right\}$

4. $\left\{-\frac{1}{2}\,;\ -\frac{1}{5}\right\}$

5. $\left\{-\frac{1}{3}\,;\ \frac{2}{3}\right\}$

6. $\left\{-5;\ -\frac{3}{4}\right\}$

7. $\left\{-\frac{2}{5};\ \frac{1}{2}\right\}$

8. $\left\{-1\frac{1}{2};\ 4\right\}$

9. $\left\{-3;\ -1\frac{1}{5}\right\}$

10. $\left\{-\frac{3}{8};\ 2\right\}$

Карточка 4

1. $\left\{-1\frac{1}{2}\,;-\frac{2}{3}\right\}$

2. $\left\{-\frac{1}{2}\,;\ 1\frac{1}{5}\right\}$

3. $\left\{-1\frac{1}{3}\,;\ 2\right\}$

4. $\left\{-3;\ \frac{2}{7}\right\}$

5. $\left\{\frac{3}{4};\ 5\right\}$

6. $\left\{\frac{5}{18};\ 1\right\}$

7. $\left\{-3;\ 1\frac{1}{2}\right\}$

8. $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{2}{5}\right\}$

9. $\left\{-2;\ \frac{3}{8}\right\}$

10. $\left\{-4;\ 1\frac{1}{2}\right\}$

Решение проверочной работы 4

1. $\sqrt{3}x^2-2\left(\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)x+8\sqrt{6}=0$; $\quad \Big| :\sqrt{3}$

$x^2-2\left(1+2\sqrt{2}\right)x+8\sqrt{2}=0$;

$x_{1,2}=1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{1+2\cdot2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2}}=$

$=1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{1-4\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=1+2\sqrt{2}\pm\left(1-2\sqrt{2}\right)$.

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{2\,;\,4\sqrt{2}\right\}$.

2. $(2x+1)^2(x-5)=(x-1)^2(4x-5)$.

$\left(4x^2+4x+1\right)(x-5)=\left(x^2-2x+1\right)(4x-5)$;

$4x^3+4x^2+x-20x^2-20x-5=4x^3-8x^2+4x-5x^2+10x-5$;

$-3x^2-33x=0$;

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-11 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{0;\ -11\}$.

3. $\dfrac{27x^3+125}{3x+5}+5+48x=0$; $\qquad D(У)$: $\ 3x+5\neq0$; $\ x\neq-1\dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{(3x+5)\left(9x^2-15x+25\right)}{3x+5}+5+48x=0$;

$9x^2-15x+25+5+48x=0$; $\qquad 9x^2+33x+30=0$;

$3x^2+11x+10=0$; $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-120}}{6}=\dfrac{-11\pm1}{6}$;

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1\dfrac{2}{3}\notin D(У). \end{array}\right.$

Ответ: $x=-2$.

4. $\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+4x-4}=\dfrac{(3x+2)^2}{9x^2-4}$.

а) $3x^2+4x-4=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\dfrac{-2\pm4}{3}$; $\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$;

$$3x^2+4x-4=3(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x+2)(3x-2);$$

б) $2x^2+7x+6=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\dfrac{-7\pm1}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=-1,5\end{array}\right.$;

$$2x^2+7x+6=2(x+2)(x+1,5)=(x+2)(2x+3);$$

$\dfrac{(x+2)(2x+3)}{(x+2)(3x-2)}=\dfrac{(3x+2)^2}{(3x+2)(3x-2)}$; $\quad D(У):\ \begin{cases}x\neq-2\\ x\neq\pm\dfrac{2}{3}\end{cases}$.

$\dfrac{2x+3}{3x-2}=\dfrac{3x+2}{3x-2}$; $\quad 2x+3=3x+2$; $\quad x=1\in D(У)$.

Ответ: $x=1$.

5. $\left(\dfrac{15}{88-32x}-\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}x\right)^2=1$; $\qquad D(У):\ x\neq2,75$.

$\left[\begin{array}{l}\dfrac{15}{8(11-4x)}-\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}x=1\\ \dfrac{15}{8(11-4x)}-\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}x=-1\end{array}\right.$; $\quad\left[\begin{array}{l}\dfrac{15-5(11-4x)+4(11-4x)x}{8(11-4x)}=1\\ \dfrac{15-5(11-4x)+4(11-4x)x}{8(11-4x)}=-1\end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l}15-55+20x+44x-16x^2=88-32x\\ 15-55+20x+44x-16x^2=-88+32x\end{array}\right.;$$

$\left[\begin{array}{l}16x^2-96x+128=0\\ 16x^2-32x-48=0\end{array}\right.$; $\quad\left[\begin{array}{l}x^2-6x+8=0\\ x^2-2x-3=0\end{array}\right.$; $\quad\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=4\\ x=3\\ x=-1\end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\{-1;2;3;4\}$.

6. $\frac{4}{x^2-10x+25}+\frac{1}{25-x^2}=\frac{1}{x+5}$; $D(У)$: $x\neq\pm5$;

$\frac{4}{(x-5)^2}-\frac{1}{(x-5)(x+5)}-\frac{1}{x+5}=0$; $4x+20-(x-5)-(x-5)^2=0$;

$4x+20-x+5-x^2+10x-25=0$; $x^2-13x=0$; $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=13\end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\{0;13\}$.

7. $\frac{2x-2}{2x^2-9x+10}=\frac{x-1}{4x^2-16x+15}$.

а) $2x^2-9x+10=0$; $x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{4}=\frac{9\pm1}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=2,5\\x=2\end{array}\right.$;

$2x^2-9x+10=2(x-2)(x-2,5)=(x-2)(2x-5)$;

б) $4x^2-16x+15=0$;

$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{4}=\frac{8\pm2}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=2,5\\x=1,5\end{array}\right.$; $D(У)$: $\left\{\begin{array}{l}x\neq2\\x\neq1,5\\x\neq2,5\end{array}\right.$

$4x^2-16x+15=4(x-1,5)(x-2,5)=(2x-3)(2x-5)$;

$(x-1)\left(\frac{2}{(x-2)(2x-5)}-\frac{1}{(2x-3)(2x-5)}\right)=0$;

$\frac{(x-1)(2(2x-3)-(x-2))}{(x-2)(2x-5)(2x-3)}=0$; $\frac{(x-1)(3x-4)}{(x-2)(2x-5)(2x-3)}=0$; $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\frac{1}{3}\end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\left\{1;1\frac{1}{3}\right\}$.

8. $\frac{9}{8x^3+12x^2-18x-27}-\frac{1}{4x^2-12x+9}=\frac{2}{9-4x^2}$;

а) $8x^3+12x^2-18x-27=(8x^3-27)+(12x^2-18x)=$

$=(2x-3)(4x^2+6x+9)+6x(2x-3)=(2x-3)(4x^2+12x+9)=$

$=(2x-3)(2x+3)^2$;

б) $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$; $\qquad D(У):\ x\neq\pm1{,}5$

в) $9-4x^2=(3-2x)(3+2x)$;

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{9}{(2x-3)(2x+3)^2}-\frac{1}{(2x-3)^2}+\frac{2}{(2x-3)(2x+3)}=0;$$

$$9(2x-3)-(2x+3)^2+2(2x-3)(2x+3)=0;$$

$$18x-27-4x^2-12x-9+8x^2-18=0;\quad 4x^2+6x-54=0;$$

$$2x^2+3x-27=0;\ x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+216}}{4}=\frac{-3\pm15}{4};\ \left[\begin{array}{l}x=-4{,}5\\x=3\end{array}\right.\in D(У).$$

Ответ: $\{-4{,}5;3\}$.

9. $\dfrac{2x+13}{2x-5}:\left(\dfrac{24}{2x^2+3x-20}+\dfrac{8}{x^2-16}-\dfrac{3}{2x^2-13x+20}\right)=x+4$.

а) $2x^2+3x-20=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+160}}{4}=\dfrac{-3\pm13}{4}$; $\quad\left[\begin{array}{l}x=2{,}5\\x=-4\end{array}\right.$;

$$2x^2+3x-20=2(x+4)(x-2{,}5)=(x+4)(2x-5);$$

б) $2x^2-13x+20=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{13\pm\sqrt{169-160}}{4}=\dfrac{13\pm3}{4}$; $\quad\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2{,}5\end{array}\right.$;

$$2x^2-13x+20=2(x-4)(x-2{,}5)=(x-4)(2x-5);$$

$$\frac{2x+13}{2x-5}:\left(\frac{24}{(x+4)(2x-5)}+\frac{8}{(x+4)(x-4)}-\frac{3}{(x-4)(2x-5)}\right)=x+4;$$

$$\frac{2x+13}{2x-5}:\left(\frac{24(x-4)+8(2x-5)-3(x+4)}{(x+4)(x-4)(2x-5)}\right)=x+4;\qquad D(У):\ \left\{\begin{array}{l}x\neq2{,}5\\x\neq\pm4\end{array}\right.$$

$$\frac{2x+13}{2x-5}:\frac{37x-148}{(x+4)(x-4)(2x-5)}=x+4;$$

$$\frac{2x+13}{2x-5}\cdot\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}(2x-5)}{37\cancel{(x-4)}}=x+4;\quad \frac{(2x+13)(x+4)(2x-5)}{37(2x-5)}=x+4;$$

$$(2x+13)(x+4)=37(x+4);\quad (x+4)(2x+13-37)=0;$$

$$(x+4)(2x-24)=0\,; \qquad \left[\begin{array}{l} x=-4\notin D(У) \\ x=12 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x=12$.

10. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}\,;$

Выделим полный квадрат в числителе каждой дроби:

$$\frac{(x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x+4)^2+4}{x+4}=\frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3}. \qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq-1 \\ x\neq-2 \\ x\neq-3 \\ x\neq-4 \end{cases}$$

Выделим целую часть в каждой дроби:

$$\frac{(x+1)^2}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{(x+4)^2}{x+4}+\frac{4}{x+4}=\frac{(x+2)^2}{x+2}+\frac{2}{x+2}+\frac{(x+3)^2}{x+3}+\frac{3}{x+3}\,;$$

$$x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3}\,;$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\,; \qquad \frac{x+4+4(x+1)}{(x+1)(x+4)}=\frac{2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)}\,;$$

$$\frac{5x+8}{(x+1)(x+4)}=\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}\,;$$

$$(5x+8)(x+2)(x+3)=(5x+12)(x+1)(x+4)\,;$$

$$(5x+8)\left(x^2+5x+6\right)=(5x+12)\left(x^2+5x+4\right);$$

$$5x^3+25x^2+30x+8x^2+40x+48=5x^3+25x^2+20x+12x^2+60x+48\,;$$

$$4x^2+10x=0\,; \qquad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2{,}5 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{0\,;-2{,}5\}$.

11. $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2\,.$

Для решения уравнения отметим, что левая часть уравнения есть функция не выше второй степени;

справа – второй степени. Для того чтобы они совпадали, достаточно трех точек совпадения.

Проверим:

а) $x=b$, тогда $L=a^2\cdot 0+b^2\dfrac{(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\cdot 0=b^2$;

$\Pi=b^2$, отсюда следует, что $L=\Pi$;

б) $x=a$, тогда $L=a^2\dfrac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\cdot 0+c^2\cdot 0=a^2$;

$\Pi=a^2$, отсюда следует, что $L=\Pi$;

в) $x=c$, тогда $L=a^2\cdot 0+b^2\cdot 0+c^2\dfrac{(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)}=c^2$;

$\Pi=c^2$, отсюда следует, что $L=\Pi$;

Левая и правая часть уравнения при трех значениях совпадают, тогда мы имеем дело с тождеством для любых допустимых значений букв $a; b; c$ $(a\neq b;\ b\neq c;\ a\neq c)$.

Ответ: любое x – есть решение этого уравнения при $a\neq b$; $b\neq c$; $a\neq c$.

12. $\dfrac{x-4}{x^2+3x-10}+\dfrac{x}{x^2-3x-4}=\dfrac{2x-0{,}8}{x^2+x-20}$;

$\dfrac{x-4}{(x+5)(x-2)}+\dfrac{x}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{2x-0{,}8}{(x+5)(x-4)}$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq -5 \\ x\neq -1 \\ x\neq 2 \\ x\neq 4 \end{cases}$

$(x-4)^2(x+1)+x(x+5)(x-2)=(2x-0{,}8)(x+1)(x-2)$;

$\left(x^2-8x+16\right)(x+1)+x\left(x^2+3x-10\right)-(2x-0{,}8)\left(x^2-x-2\right)=0$;

$x^3-7x^2+8x+16+x^3+3x^2-10x-2x^3+2{,}8x^2+3{,}2x-1{,}6=0$;

$-1{,}2x^2+1{,}2x+14{,}4=0$; $\qquad |:(-1{,}2)$

$x^2-x-12=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=4\ \notin D(У) \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Ответ: $x=-3$.

Решение проверочной работы 5

1. $|3x+2|=1$; $\left[\begin{array}{l}3x+2=1\\3x+2=-1\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}3x=1-2\\3x=-1-2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3}\\x=-1\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-1;-\dfrac{1}{3}\right\}$.

2. $|x^2-3|=2x$; $\left\{\begin{array}{l}2x\geqslant 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-3=2x\\x^2-3=-2x\end{array}\right.\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=0\\x^2+2x-3=0\end{array}\right.\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\\x=1\\x=-3\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Ответ: $\{1;3\}$.

3. $\left|\dfrac{x-4}{x^2+3x-4}\right|=1$; $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-4}{x^2+3x-4}=1\\\dfrac{x-4}{x^2+3x-4}=-1\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x-4=x^2+3x-4\\x-4=-x^2-3x+4\end{array}\right.\\x^2+3x-4\neq 0\end{array}\right.$;

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+2x=0\\x^2+4x-8=0\end{array}\right.\\x\neq -4\\x\neq 1\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=-2+2\sqrt{3}\\x=-2-2\sqrt{3}\end{array}\right.\\x\neq -4\\x\neq 1\end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-2-2\sqrt{3};-2;0;-2+2\sqrt{3}\right\}$.

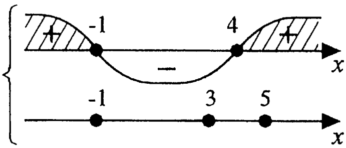
4. $\dfrac{x^2-5|x|+6}{x^2-9}=2$; $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\ \ (|x|=x)\\\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\ \ (|x|=-x)\\\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}=2\end{array}\right.\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0\\\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=2\end{array}\right.\end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\neq 3\\ x-2=2(x+3)\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x\neq -3\\ x+2=2(x-3)\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 0\\ x=-8\end{cases}\varnothing\\ \begin{cases}x<0\\ x=8\end{cases}\varnothing\end{array}\right.\quad \varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

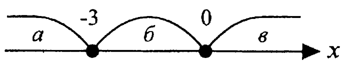
5. $|x+1|=x^2-3x-4$; $\begin{cases}x^2-3x-4\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x+1=x^2-3x-4\\ x+1=-x^2+3x+4\end{array}\right.\end{cases}$;

$$\begin{cases}x^2-3x-4\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2-4x-5=0\\ x^2-2x-3=0\end{array}\right.\end{cases};\quad \begin{cases}x^2-3x-4\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=-1\\ x=3\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases};$$



Ответ: $\{-1;5\}$.

6. $\dfrac{|x+3|-2}{|x|-2}=1$; $\left[\begin{array}{l}|x+3|=0\\ |x|=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=0\end{array}\right.$;



а) $\begin{cases}x<-3\ \begin{pmatrix}|x+3|=-x-3\\ |x|=-x\end{pmatrix}\\ \dfrac{-x-3-2}{-x-2}=1\end{cases}$; $\begin{cases}x<-3\\ x+5=x+2\end{cases}$; $\begin{cases}x<-3\\ 5=2\end{cases}$ $\varnothing$.

б) $\begin{cases}0>x\geqslant -3\ \begin{pmatrix}|x+3|=x+3\\ |x|=-x\end{pmatrix}\\ \dfrac{x+3-2}{-x-2}=1\end{cases}$; $\begin{cases}0>x\geqslant -3\\ x+1=-x-2\\ x\neq -2\end{cases}$; $\begin{cases}0>x\geqslant -3\\ x=-1{,}5\end{cases}$;

$x=-1{,}5$.

в) $\begin{cases} x \geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} |x+3| = x+3 \\ |x| = x \end{pmatrix} \\ \dfrac{x+3-2}{x-2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+1 = x-2 \\ x \neq 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1 = -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$ $\varnothing$.

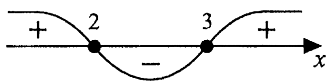
Ответ: $x = -1{,}5$.

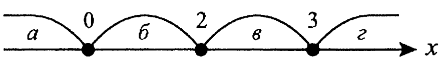
7. $||x-5|-3| = 2x$; $\begin{cases} 2x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-5|-3 = 2x \\ |x-5|-3 = -2x \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-5| = 2x+3 \\ |x-5| = 3-2x \end{array}\right. \end{cases}$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-5 = 2x+3 \\ x-5 = -2x-3 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x-5 = 3-2x \\ x-5 = 2x-3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\dfrac{2}{3} \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ \varnothing \end{array}\right.$.

Ответ: $x = \dfrac{2}{3}$.

8. $\dfrac{|x^2-5x+6|}{|x|-2} = 1$; $y = x^2 - 5x + 6$;





а) $\begin{cases} x < 0 \quad \begin{pmatrix} x^2-5x+6 > 0;\ |x^2-5x+6| = x^2-5x+6 \\ x < 0;\ |x| = -x \end{pmatrix} \\ \dfrac{x^2-5x+6}{-x-2} = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x < 0 \\ x^2-5x+6 = -x-2 \\ x \neq -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x < 0 \\ x^2-4x+8 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$; $D < 0$ $\varnothing$.

б) $\begin{cases} 2 > x \geqslant 0 \left(\begin{matrix} x^2 - 5x + 6 > 0; \ |x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6 \\ x \geqslant 0; \ |x| = x \end{matrix} \right) \\ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 1 \end{cases};$

$\begin{cases} 2 > x \geqslant 0 \\ x - 3 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 > x \geqslant 0 \\ x = 4 \end{cases} \quad \varnothing.$

в) $\begin{cases} 3 > x > 2 \left(\begin{matrix} x^2 - 5x + 6 < 0; \ |x^2 - 5x + 6| = -x^2 + 5x - 6 \\ x > 0; \ |x| = x \end{matrix} \right) \\ \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x - 2} = 1 \end{cases};$

$\begin{cases} 3 > x > 2 \\ 3 - x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3 > x > 2 \\ x = 2 \end{cases}; \quad \varnothing.$

г) $\begin{cases} x \geqslant 3 \left(\begin{matrix} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0; \ |x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6 \\ x > 0; \ |x| = x \end{matrix} \right) \\ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x - 3 = 1 \end{cases};$

$\begin{cases} x \geqslant 3 \\ x = 4 \end{cases}; \quad x = 4.$

Ответ: $\{4\}$.

9. $\left|\left|x^2 - 5x\right| - 6\right| = x^2 - 2x - 3; \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x^2 - 5x| - 6 = x^2 - 2x - 3 \\ |x^2 - 5x| - 6 = -x^2 + 2x + 3 \end{array} \right. \end{cases};$

$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x^2 - 5x| = x^2 - 2x + 3 \\ |x^2 - 5x| = -x^2 + 2x + 9 \end{array} \right. \end{cases}.$

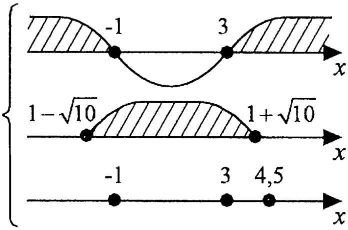
а) $\begin{cases}(x-3)(x+1)\geqslant 0\\ |x^2-5x|=x^2-2x+3\ \left(x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0\ \forall x\right)\end{cases};$

$$\begin{cases}(x-3)(x+1)\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2-5x=x^2-2x+3\\ x^2-5x=-x^2+2x-3\end{array}\right.\end{cases};\quad \begin{cases}(x-3)(x+1)\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ 2x^2-7x+3=0\end{array}\right.\end{cases};$$

$$\begin{cases}(x-3)(x+1)\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases};\quad \{-1\,;3\}.$$

б) $\begin{cases}(x-3)(x+1)\geqslant 0\\ |x^2-5x|=-x^2+2x+9\end{cases};\quad \begin{cases}(x-3)(x+1)\geqslant 0\\ -x^2+2x+9\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2-5x=-x^2+2x+9\\ x^2-5x=x^2-2x-9\end{array}\right.\end{cases};$

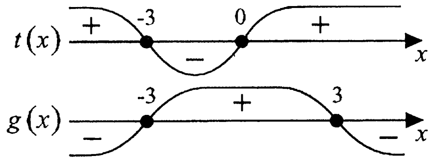
$$\begin{cases}(x-3)(x+1)\geqslant 0\\ -x^2+2x+9\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-7x-9=0\\ x=3\end{array}\right.\end{cases};$$

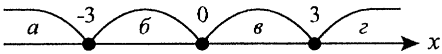


Ответ: $\{-1\,;3\}$.

10. $|x^2+3x|=|9-x^2|+2\,;\quad \left(\begin{array}{l}|x^2+3x|=0\\ |9-x^2|=0\end{array}\right);\quad \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-3\\ x=3\\ x=-3\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\\ x=-3\end{array}\right..$

$t(x)=x^2+3x; \quad g(x)=9-x^2$





а) $\begin{cases} x<-3 \left(\begin{array}{l} |x^2+3x|=x^2+3x \\ |9-x^2|=x^2-9 \end{array}\right) \\ x^2+3x=x^2-9+2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x<-3 \\ x=-\dfrac{7}{3} \end{cases}; \quad \varnothing.$

б) $\begin{cases} 0>x\geqslant -3 \left(\begin{array}{l} |x^2+3x|=-x^2-3x \\ |9-x^2|=9-x^2 \end{array}\right) \\ -x^2-3x=9-x^2+2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0>x\geqslant -3 \\ x=-\dfrac{11}{3} \end{cases}; \quad \varnothing.$

в) $\begin{cases} 3>x\geqslant 0 \left(\begin{array}{l} |x^2+3x|=x^2+3x \\ |9-x^2|=9-x^2 \end{array}\right) \\ x^2+3x=9-x^2+2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3>x\geqslant 0 \\ 2x^2+3x-11=0 \end{cases};$

$\begin{cases} 3>x\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{97}}{4} \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{97}}{4} \end{array}\right. \end{cases}; \quad x=\dfrac{-3+\sqrt{97}}{4}.$

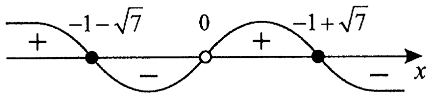
г) $\begin{cases} x\geqslant 3 \left(\begin{array}{l} |x^2+3x|=x^2+3x \\ |9-x^2|=x^2-9 \end{array}\right) \\ x^2+3x=x^2-9+2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x\geqslant 3 \\ x=-\dfrac{7}{3} \end{cases}; \quad \varnothing.$

Ответ: $x=\dfrac{-3+\sqrt{97}}{4}$.

11. $\left||x-1|-\frac{6}{x}\right|=x+2$; $\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x-1|-\frac{6}{x}=x+2 \\ |x-1|-\frac{6}{x}=-x-2 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} x\geqslant -2 \\ \left[\begin{array}{l} |x-1|=\frac{x^2+2x+6}{x} \\ |x-1|=-\frac{x^2+2x-6}{x} \end{array}\right. \end{cases}$;

$\left(x^2+2x+6>0\ (\forall x)\right)$; $x^2+2x-6=0$; $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{7}$

$t(x)=-\frac{x^2+2x-6}{x}$



а) $\begin{cases} x\geqslant -2 \\ x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x-1=\frac{x^2+2x+6}{x} \\ x-1=-\frac{x^2+2x+6}{x} \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2=x^2+3x+6 \\ x^2=-x^2-x-6 \end{array}\right. \end{cases}$;

$\begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ 2x^2+x+6=0 \quad D<0 \end{array}\right. \end{cases}$; $\varnothing$.

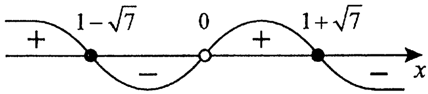
б) $\begin{cases} 0<x\leqslant -1+\sqrt{7} \\ \left[\begin{array}{l} x-1=-\frac{x^2+2x-6}{x} \\ x-1=\frac{x^2+2x-6}{x} \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} 0<x\leqslant -1+\sqrt{7} \\ \left[\begin{array}{l} x^2=-x^2-x+6 \\ x^2=x^2+3x-6 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} 0<x\leqslant -1+\sqrt{7} \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-6=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$;

$\begin{cases} 0<x\leqslant -1+\sqrt{7} \\ \left[\begin{array}{l} x=1{,}5 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$; $\begin{cases} 0<x\leqslant -1+\sqrt{7} \\ x=1{,}5 \end{cases}$; $x=1{,}5$.

Ответ: $\{1{,}5\}$.

12. $\left|\,|x+1|-\dfrac{6}{x}\right|=2-x\,;\quad \begin{cases} x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} |x+1|=\dfrac{6}{x}+2-x \\ |x+1|=\dfrac{6}{x}+x-2 \end{array}\right. \end{cases};$

$t(x)=-\dfrac{x^2-2x-6}{x}$



а) $\begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ |x+1|=-\dfrac{x^2-2x-6}{x} \end{cases};\quad \begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+1=-\dfrac{x^2-2x-6}{x} \\ x+1=\dfrac{x^2-2x-6}{x} \end{array}\right. \end{cases};\quad \begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2=-x^2+x+6 \\ x^2=x^2-3x-6 \end{array}\right. \end{cases};$

$\begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-6=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases};\quad \begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1{,}5 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases};\quad x=2\,.$

б) $\begin{cases} x\leqslant 1-\sqrt{7} \\ |x+1|=-\dfrac{x^2-2x-6}{x} \end{cases};\quad \begin{cases} x\leqslant 1-\sqrt{7} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1{,}5 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases};\quad x=-2\,.$

в) $\begin{cases} x\leqslant 2 \\ |x+1|=\dfrac{x^2-2x+6}{x} \end{cases};\quad g(x)=x^2-2x+6>0\ (\forall x)$

$\begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x+1=\dfrac{x^2-2x+6}{x} \\ x+1=-\dfrac{x^2-2x+6}{x} \end{array}\right. \end{cases};\quad \begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2=x^2-3x+6 \\ x^2=-x^2+x-6 \end{array}\right. \end{cases};\quad \begin{cases} 0<x\leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2x^2-x+6=0\ (D<0) \end{array}\right. \end{cases};$

$x=2\,.$

Ответ: $\{-2\,;2\}$.

Решение зачетной карточки 1

1. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}=\dfrac{3x^2+4x-4}{1-x}$. $\quad D(У)$: $\begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq 1 \end{cases}$

а) $3x^2+4x-4=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\dfrac{-2\pm 4}{3}$; $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$;

$3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$.

Уравнение приобретает вид:

$\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}-\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}=0$; $(3x-2)\left(\dfrac{5x+4}{x+3}+\dfrac{x+2}{x-1}\right)=0$;

$(3x-2)\dfrac{(5x+4)(x-1)+(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-1)}=0$;

б) $3x-2=0$; $\quad x=\dfrac{2}{3}\in D(У)$

в) $(5x+4)(x-1)+(x+2)(x+3)=0$; $5x^2-x-4+x^2+5x+6=0$;

$6x^2+4x+2=0$; $3x^2+2x+1=0$; $D<0$.

Ответ: $x=\dfrac{2}{3}$.

2. $\dfrac{(x^2+3x)^2-2x^2-6x-8}{x^4-5x^2+4}-\dfrac{4x^2+16x+16}{x^3+2x^2-4x-8}=3$.

а) $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$;

б) $x^3+2x^2-4x-8=(x^3-8)+(2x^2-4x)=(x-2)(x^2+2x+4)+2x(x-2)=$

$=(x-2)(x^2+2x+4+2x)=(x-2)(x^2+4x+4)=(x-2)(x+2)^2$;

в) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)=$

$=(x+4)(x-1)(x+1)(x+2)$.

Тогда уравнение приобретает вид:

$\dfrac{(x+4)(x-1)(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}-\dfrac{4(x+2)^2}{(x-2)(x+2)^2}=3$; $\quad D(У)$: $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -2 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

$\dfrac{x+4}{x-2}-\dfrac{4}{x-2}=3$; $x+4-4=3(x-2)$; $3x-6-x=0$;

$x=3\in D(У)$. Ответ: $x=3$.

3. $8x^3+4x^2-10x+3=0$; $d=\pm1;\pm3;\pm\frac{1}{2};\pm\frac{3}{2};\pm\frac{1}{4};\pm\frac{3}{4};\pm\frac{1}{8};\pm\frac{3}{8}$.

$f(1)\neq0$; $f(-1)\neq0$; $f(3)\neq0$; $f(-3)\neq0$;

$f\left(\frac{1}{2}\right)=8\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}-10\cdot\frac{1}{2}+3=2-5+3=0$.

Тогда $f(x)\vdots\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{array}{l|l} 8x^3+4x^2-10x+3 & x-\frac{1}{2} \\ \cline{2-2} \underline{8x^3-4x^2} & 8x^2+8x-6 \\ \quad 8x^2-10x & \\ \quad \underline{8x^2-4x} & \\ \qquad -6x+3 & \\ \qquad \underline{-6x+3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$8x^2+8x-6=0$;

$4x^2+4x-3=0$;

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}=$

$=\frac{-2\pm4}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};-1\frac{1}{2}\right\}$.

4. $\frac{5}{x^2+10x+25}-\frac{7}{x^2+3x-10}=\frac{4}{4-x^2}$;

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$.

$\frac{5}{(x+5)^2}-\frac{7}{(x+5)(x-2)}+\frac{4}{(x+2)(x-2)}=0$; $D(У)$: $\begin{cases} x\neq-5 \\ x\neq2 \\ x\neq-2 \end{cases}$

$5(x+2)(x-2)-7(x+5)(x+2)+4(x+5)^2=0$;

$5(x^2-4)-7(x^2+7x+10)+4(x+5)^2=0$;

$5x^2-20-7x^2-49x-70+4x^2+40x+100=0$; $2x^2-9x+10=0$;

$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{4}=\frac{9\pm1}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=2;\notin D(У) \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $x=2{,}5$.

5. $\dfrac{4x+5}{4x^2+13x+10}=2x+3$;

$4x^2+13x+10=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{169-160}}{8}=\dfrac{-13\pm3}{8}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$;

$4x^2+13x+10=(4x+5)(x+2)$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq-2 \\ x\neq-1\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\dfrac{4x+5}{(x+2)(4x+5)}=2x+3$; $\quad \dfrac{1}{x+2}=2x+3$; $\quad 1=(2x+3)(x+2)$;

$1=2x^2+7x+6$; $\quad 2x^2+7x+5=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\dfrac{-7\pm3}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\{-1;-2{,}5\}$.

6. $\dfrac{2x}{2x^2+5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2-x+3}+6=0$; $\quad \dfrac{2x}{x\left(2x+5+\frac{3}{x}\right)}+\dfrac{13x}{x\left(2x-1+\frac{3}{x}\right)}+6=0$.

Пусть $2x+\dfrac{3}{x}+5=t$, тогда $2x+\dfrac{3}{x}-1=t-6$.

$\dfrac{2}{t}+\dfrac{13}{t-6}+6=0$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} t\neq0 \\ t\neq6 \end{cases}$

$2(t-6)+13t+6t(t-6)=0$; $\quad 2t-12+13t+6t^2-36t=0$;

$6t^2-21t-12=0$; $\quad 2t^2-7t-4=0$;

$t_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\dfrac{7\pm9}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \in D(У)$; $\quad \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{3}{x}+5=4 \\ 2x+\dfrac{3}{x}+5=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} 2x^2+x+3=0;\ D<0 \\ 4x^2+11x+6=0 \end{array}\right.$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-96}}{8}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{4} \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-2;-\dfrac{3}{4}\right\}$.

Решение зачетной карточки 2

1. $\dfrac{2x-1}{4x^2+4x-3}=\dfrac{2x-3}{9-4x^2}+2x+4$.

$4x^2+4x-3=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}=\dfrac{-2\pm4}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$;

$4x^2+4x-3=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=(2x-1)(2x+3)$;

$\dfrac{2x-1}{(2x-1)(2x+3)}+\dfrac{2x-3}{(2x+3)(2x-3)}=2(x+2)$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq\dfrac{1}{2} \\ x\neq-\dfrac{3}{2} \\ x\neq\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{1}{2x+3}=2(x+2)$; $\quad 2=2(x+2)(2x+3)$; $\quad 1=2x^2+7x+6$;

$2x^2+7x+5=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\dfrac{-7\pm3}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.\in D(У)$.

Ответ: $\{-2{,}5;\ -1\}$.

2. $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+6}{x+2}+\dfrac{x-6}{x-2}$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq\pm1 \\ x\neq\pm2 \end{cases}$

$\dfrac{(x-1)-2}{x-1}+\dfrac{(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{(x+2)+4}{x+2}+\dfrac{(x-2)-4}{x-2}$;

$1-\dfrac{2}{x-1}+1+\dfrac{2}{x+1}=1+\dfrac{4}{x+2}+1-\dfrac{4}{x-2}$;

$-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{4}{x-2}$; $\qquad \dfrac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2(x-2-x-2)}{(x+2)(x-2)}$;

$\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{-8}{(x+2)(x-2)}$;

$x^2-4=4(x^2-1)$; $\quad 3x^2=0$; $\quad x=0\in D(У)$.

Ответ: $x=0$.

3. $\frac{x^2+x}{x^2+x+1}-\frac{x^2+x+2}{x^2+x-2}=1$.

Положим $x^2+x+1=t$.

$x^2+x-2=t-3$; $x^2+x=t-1$; $x^2+x+2=t+1$;

$\frac{t-1}{t}-\frac{t+1}{t-3}=1$; $D(У)$: $\begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq 3 \end{cases}$;

$t^2-4t+3-t^2-t=t^2-3t$;

$t^2+2t-3=0$; $\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right. \in D(У)$;

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=-3 \\ x^2+x+1=1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2+x+4=0 \quad D<0 \\ x^2+x=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{0;-1\}$.

4. $31\left(2x+\frac{1}{2x}\right)-5\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}\right)=36$.

Положим $2x+\frac{1}{2x}=t$;

$4x^2+2\cdot 2x\cdot\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}=t^2$;

$4x^2+\frac{1}{4x^2}=t^2-2$; $31t-5\left(t^2-2\right)=36$; $5t^2-31t+26=0$;

$t_{1,2}=\frac{31\pm\sqrt{961-520}}{10}=\frac{31\pm 21}{10}$; $\left[\begin{array}{l} t=5,2 \\ t=1 \end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l} 2x+\frac{1}{2x}=\frac{52}{10} \\ 2x+\frac{1}{2x}=1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 20x^2-52x+5=0 \\ 4x^2-2x+1=0;\ D<0 \end{array}\right.;$$

$$x_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{26^2-20\cdot 5}}{20}=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{20}=\frac{26\pm 24}{20}; \quad \left[\begin{array}{l} x=2,5 \\ x=0,1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{0,1\,;\,2,5\}$.

5. $\dfrac{4x+6}{x+2}-\dfrac{5x-30}{3x^2-10x-8}:\left(\dfrac{4(x+4)}{3x^2-10x-8}-\dfrac{3x+2}{x^2-16}\right)=1$.

$3x^2-10x-8=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+24}}{3}=\dfrac{5\pm7}{3}$; $\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$;

$3x^2-10x-8=3(x-4)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=(x-4)(3x+2)$; $D(У)$: $\begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq -4 \\ x\neq -2 \\ x\neq -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\dfrac{2(2x+3)}{x+2}-\dfrac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)}:\left(\dfrac{4(x+4)}{(x-4)(3x+2)}-\dfrac{3x+2}{(x-4)(x+4)}\right)=1$;

$\dfrac{2(2x+3)}{x+2}-\dfrac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)}:\dfrac{4(x+4)^2-(3x+2)^2}{(x-4)(x+4)(3x+2)}=1$;

$\dfrac{2(2x+3)}{x+2}-\dfrac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)}\cdot\dfrac{(x-4)(x+4)(3x+2)}{(2(x+4)+3x+2)(2(x+4)-3x-2)}=1$;

$\dfrac{2(2x+3)}{x+2}-\dfrac{5(x-6)}{(x-4)(3x+2)}\cdot\dfrac{(x-4)(x+4)(3x+2)}{5(x+2)(6-x)}=1$; $x\neq 6$;

$\dfrac{5x+10}{x+2}=1$; $5=1-$ ложь

Ответ: $x=\varnothing$. (Решения нет).

6. $x^4-10x^3+90x-81=0$.

$(x^4-81)-10x(x^2-9)=0$;

$(x^2+9)(x^2-9)-10x(x^2-9)=0$;

$(x^2-9)(x^2+9-10x)=0$; $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \\ x=1 \\ x=9 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-3;1;3;9\}$.

Решение зачетной карточки 3

1. $\dfrac{4x^2+13x+10}{4x+5}=\dfrac{1}{2x+3}$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq -1\frac{1}{2} \\ x\neq -1\frac{1}{4} \end{cases}$

$4x^2+13x+10=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{169-160}}{8}=\dfrac{-13\pm3}{8}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{5}{4} \end{array}\right.$;

$4x^2+13x+10=4(x+2)\left(x+\frac{5}{4}\right)=(x+2)(4x+5)$;

$\dfrac{(x+2)(4x+5)}{(4x+5)}=\dfrac{1}{2x+3}$; $\quad x+2=\dfrac{1}{2x+3}$; $\quad (x+2)(2x+3)=1$;

$2x^2+7x+6=1$; $\quad 2x^2+7x+5=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\dfrac{-7\pm3}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{5}{2} \end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\{-2{,}5\,;\,-1\}$.

2. $\dfrac{8x^2-22x+15}{4x-15}\left(\dfrac{16x-24}{16x^2-48x+35}+\dfrac{9}{8x^2-46x+56}+\dfrac{9}{42x-40-8x^2}\right)=2x+3$.

а) $8x^2-22x+15=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-120}}{8}=\dfrac{11\pm1}{8}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$;

$8x^2-22x+15=8\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)=(2x-3)(4x-5)$;

б) $16x^2-48x+35=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{24\pm\sqrt{24^2-16\cdot35}}{16}=\dfrac{24\pm4}{16}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{4} \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$;

$16x^2-48x+35=16\left(x-\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)=(4x-7)(4x-5)$;

в) $8x^2-46x+56=0$; $\quad 4x^2-23x+28=0$;

$$x_{1,2}=\frac{23\pm\sqrt{529-448}}{8}=\frac{23\pm 9}{8};\quad \left[\begin{aligned}&x=4\\&x=\frac{7}{4}\end{aligned}\right.;$$

$$8x^2-46x+56=8\left(x-\frac{7}{4}\right)(x-4)=2(4x-7)(x-4);$$

г) $-8x^2+42x-40=0;\quad 4x^2-21x+20=0;$

$$x_{1,2}=\frac{21\pm\sqrt{441-320}}{8}=\frac{21\pm 11}{8};\quad \left[\begin{aligned}&x=4\\&x=\frac{5}{4}\end{aligned}\right.;\qquad D(У):\ \begin{cases}x\neq 3{,}75\\x\neq 1{,}25\\x\neq 1{,}75\\x\neq 4\end{cases}$$

$$-8x^2+42x-40=-8(x-4)\left(x-\frac{5}{4}\right)=-2(x-4)(4x-5);$$

Уравнение приобретает вид:

$$\frac{(2x-3)(4x-5)}{4x-15}\left(\frac{8(2x-3)}{(4x-7)(4x-5)}+\frac{9}{2(x-4)(4x-7)}-\frac{9}{2(x-4)(4x-5)}\right)=2x+3;$$

$$\frac{(2x-3)(4x-5)}{4x-15}\cdot\frac{8(2x-3)\cdot 2(x-4)+9(4x-5)-9(4x-7)}{2(4x-7)(4x-5)(x-4)}=2x+3;$$

$$\frac{(2x-3)\left(16\left(2x^2-11x+12\right)+36x-45-36x+63\right)}{(4x-15)\cdot 2(4x-7)(x-4)}=2x+3;$$

$$\frac{(2x-3)\left(32x^2-176x+210\right)}{(4x-15)\cdot 2(4x-7)(x-4)}=2x+3;$$

$$32x^2-176x+210=0;\quad 16x^2-88x+105=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{44\pm\sqrt{44^2-16\cdot 105}}{16}=\frac{44\pm 16}{16};\quad \left[\begin{aligned}&x=\frac{15}{4}\\&x=\frac{7}{4}\end{aligned}\right.;$$

$$32x^2-176+210=32\left(x-\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{15}{4}\right)=2(4x-7)(4x-15);$$

$$\frac{(2x-3)2(4x-15)(4x-7)}{(4x-15)2(4x-7)(x-4)}=2x+3;\quad \frac{2x-3}{x-4}=2x+3;$$

$2x-3=2x^2-5x-12$; $\quad 2x^2-7x-9=0$;

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+72}}{4}=\dfrac{7\pm 11}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=4,5 \\ x=-1 \end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\{-1\,;4,5\}$.

3. $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)(x+4)(x+6)=12$; $\qquad D(У)$: $\quad x\neq 0$;

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)=12x^2$.

Сгруппируем первый с четвертым и второй с третьим множители и выполним умножение.

$\left(x^2+8x+12\right)\left(x^2+7x+12\right)=12x^2$; $\quad x\left(x+8+\dfrac{12}{x}\right)x\left(x+\dfrac{12}{x}+7\right)=12x^2$;

$\left(x+\dfrac{12}{x}+8\right)\left(x+\dfrac{12}{x}+7\right)=12$.

Положим $x+\dfrac{12}{x}+7=t$, значит $t(t+1)=12$;

$t^2+t-12=0 \quad \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=3 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{12}{x}+7=-4 \\ x+\dfrac{12}{x}+7=3 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x^2+11x+12=0 \\ x^2+4x+12=0;\ D<0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-11+\sqrt{73}}{2} \\ x=\dfrac{-11-\sqrt{73}}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{11+\sqrt{73}}{2}\,;\dfrac{-11+\sqrt{73}}{2}\right\}$.

4. $\dfrac{4\left(x^2+1\right)}{x^2-10x+1}-\dfrac{5x}{x^2+1}+3,5=0$.

$\dfrac{4x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(x-10+\dfrac{1}{x}\right)}-\dfrac{5x}{x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}+3,5=0$; $\quad \dfrac{4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x+\dfrac{1}{x}-10}-\dfrac{5}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}+3,5=0$.

Положим $x+\dfrac{1}{x}=t$: $\quad \dfrac{4t}{t-10}-\dfrac{5}{t}+3,5=0$;

$$4t^2-5t+50+3{,}5t^2-35t=0\,;\quad 7{,}5t^2-40t+50=0\,;$$

$$15t^2-80t+100=0\,;\quad 3t^2-16t+20=0\,;\quad t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{3}=\frac{8\pm2}{3}\,;$$

$$\left[\begin{aligned}&x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}\\&x+\frac{1}{x}=2\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned}&3x^2-10x+3=0\\&x^2-2x+1=0\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned}&x=3\\&x=\frac{1}{3}\\&x=1\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\,;1\,;3\right\}$.

5. $x^3+\dfrac{55x^2+22x-8}{8x^2-22x-55}=0$.

$$8x^5-22x^4-55x^3+55x^2+22x-8=0\,;\quad f(1)=8-22-55+55+22-8=0\,;$$

$$\begin{array}{l|l}
8x^5-22x^4-55x^3+55x^2+22x-8 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{8x^5-8x^4} & 8x^4-14x^3-69x^2-14x+8 \\
\quad -14x^4-55x^3 & \\
\quad \underline{-14x^4+14x^3} & \\
\qquad -69x^3+55x^2 & \\
\qquad \underline{-69x^3+69x^2} & \\
\qquad\quad -14x^2+22x & \\
\qquad\quad \underline{-14x^2+14x} & \\
\qquad\qquad 8x-8 & \\
\qquad\qquad \underline{8x-8} & \\
\qquad\qquad\; 0 &
\end{array}$$

$$8x^4-14x^3-69x^2-14x+8=0\,.$$

Возвратное уравнение

$$8x^2-14x-69-\frac{14}{x}+\frac{8}{x^2}=0\,;\quad 8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-14\left(x+\frac{1}{x}\right)-69=0\,.$$

Положим $x+\dfrac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$;

$$8\left(t^2-2\right)-14t-69=0\,;\quad 8t^2-14t-85=0\,;$$

$$t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+8\cdot 85}}{8}=\frac{7\pm\sqrt{729}}{8}=\frac{7\pm 27}{8};\qquad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{17}{4} \\ t=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{17}{4} \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 4x^2-17x+4=0 \\ 2x^2+5x+2=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{4} \\ x=-2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-2\,;-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\,;1\,;4\right\}$.

6. $(x+1)^5+(x-3)^5=242(x-1)$.

Положим $t=\frac{x+1+x-3}{2}=x-1$, тогда $x=t+1$.

Уравнение примет вид.

$(t+2)^5+(t-2)^5=242t$;

$$\begin{array}{rl} & (t+2)^5 = t^5+5t^4\cdot 2+10t^3\cdot 2^2+10t^2\cdot 2^3+5t\cdot 2^4+2^5 \\ + & (t-2)^5 = t^5-5t^4\cdot 2+10t^3\cdot 2^2-10t^2\cdot 2^3+5t\cdot 2^4-2^5 \\ \hline \end{array}$$

$(t+2)^5+(t-2)^5= 2t^5+0+20t^3\cdot 2^2+0+10t\cdot 2^4$

$2t\left(t^4+40t^2+80\right)=242t$;

а) $t=0$;

$x-1=0$; $\quad x=1$;

б) $t^4+40t^2-41=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ t^2=-41;\ \varnothing \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{0\,;1\,;2\}$.

Решение зачетной карточки 4

1. $\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4x-12}-\frac{178x+748}{2x^2+19x+42}=x$.

а) $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$;

б) $x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$;

в) $2x^2+19x+42=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{361-336}}{4}=\frac{-19\pm 5}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-\frac{7}{2} \end{array}\right.;$$

$$2x^2+19x+42=2(x+6)\left(x+\frac{7}{2}\right)=(x+6)(2x+7).$$

Уравнение приобретает вид:

$$\frac{(x-2)^3}{(x+6)(x-2)}-\frac{178x+748}{(x+6)(2x+7)}=x; \qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -6 \\ x\neq -3,5 \end{cases}$$

$$\frac{(x-2)^2}{x+6}-\frac{178x+748}{(x+6)(2x+7)}-x=0;$$

$$(x-2)^2(2x+7)-178x-748-x\left(2x^2+19x+42\right)=0;$$

$$\left(x^2-4x+4\right)(2x+7)-178x-748-2x^3-19x^2-42x=0;$$

$$2x^3-x^2-20x+28-2x^3-19x^2-220x-748=0;$$

$$-20x^2-240x-720=0;$$

$$x^2+12x+36=0;$$

$$(x+6)^2=0;$$

$$x=-6\notin D(У).$$

Ответ: $x\in\varnothing$ (решения нет).

2. $x^2(2x-1)+x(x^2-1)=2(x+1)^2$.

$2x^3-x^2+x^3-x=2x^2+4x+2$;

$3x^3-3x^2-5x-2=0$;

$f(2)=3\cdot8-3\cdot4-5\cdot2-2=0$;

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-3x^2-5x-2 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-6x^2} & 3x^2+3x+1 \\
\qquad 3x^2-5x & \\
\qquad \underline{3x^2-6x} & \\
\qquad\qquad x-2 & \\
\qquad\qquad \underline{x-2} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$3x^2+3x+1=0$; $D<0$.

Ответ: $x=2$.

3. $(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x+3)+24=0$.

Положим $2x^2+3x-1=t$, тогда $2x^2+3x+3=t+4$. Уравнение примет вид

$t^2-5(t+4)+24=0$; $t^2-5t-20+24=0$; $t^2-5t+4=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 2x^2+3x-1=4 \\ 2x^2+3x-1=1 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} 2x^2+3x-5=0 \\ 2x^2+3x-2=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2,5 \\ x=-2 \\ x=0,5 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-2,5;-2;0,5;1\}$.

4. $\dfrac{24}{x^2+2x}=\dfrac{12}{x^2+x}+x^2+x$.

Так как $\dfrac{1}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)$,

$\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$;

то $24\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)=12\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+x^2+x$.

$\dfrac{12}{x}-\dfrac{12}{x+2}=\dfrac{12}{x}-\dfrac{12}{x+1}+x^2+x$;

$12\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)=x^2+x$;

$\dfrac{12}{(x+1)(x+2)}=x(x+1)$;

$12=x(x+1)(x+1)(x+2)$.

Сгруппируем первый множитель с четвертым и второй с третьим множителем.

$12=\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x+1\right)$.

Тогда $x^2+2x=t$;

$12=t(t+1)$;

$t^2+t-12=0$; $\left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=3 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2+2x=-4 \\ x^2+2x=3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+2x+4=0;\ D<0 \\ x^2+2x-3=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$;

Ответ: $\{-3\,;1\}$.

5. $\left(\frac{9-2x}{x^2+x-42}+\frac{x-6}{2x^2+5x-63}\right)\left(\frac{2}{x-5}+\frac{6}{x-3}\right)=1$.

а) $x^2+x-42=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=6 \end{array}\right.;$$

$x^2+x-42=(x+7)(x-6)$;

б) $2x^2+5x-63=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+504}}{4}=\frac{-5\pm 23}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=\frac{9}{2} \end{array}\right.;$$

$$2x^2+5x-63=2(x+7)\left(x-\frac{9}{2}\right)=(x+7)(2x-9);$$

$$\left(\frac{9-2x}{(x+7)(x-6)}+\frac{x-6}{(x+7)(2x-9)}\right)\frac{2(x-3)+6(x-5)}{(x-5)(x-3)}=1;$$

$$D(Y): \quad \begin{cases} x\neq 6 \\ x\neq 5 \\ x\neq 4{,}5; \\ x\neq 3 \\ x\neq -7 \end{cases}$$

$$\frac{(x-6)^2-(2x-9)^2}{(x+7)(x-6)(2x-9)}\cdot\frac{8x-36}{(x-5)(x-3)}=1;$$

$$\frac{(x-6+2x-9)(x-6-2x+9)4(2x-9)}{(x+7)(x-6)(2x-9)(x-5)(x-3)}=1;$$

$$\frac{3(x-5)(3-x)4(2x-9)}{(x+7)(x-6)(2x-9)(x-5)(x-3)}=1;$$

$-12=x^2+x-42; \qquad x^2+x-30=0;$

$$\left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=5\notin D(Y). \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-6$.

6. $x^6+1+(x+1)^6=2\left(x^2+x+1\right)^3$.

Пусть $t=\dfrac{x+x+1}{2}=x+\dfrac{1}{2}$;

$x=t-\dfrac{1}{2}$;

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.

Уравнение примет вид $\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^6+\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^6+1=2\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)^3$

$$\begin{array}{l} \left(t+\frac{1}{2}\right)^6=t^6+6t^5\cdot\frac{1}{2}+15t^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+20t^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+15t^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+6t\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ + \\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^6=t^6-6t^5\cdot\frac{1}{2}+15t^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-20t^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+15t^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4-6t\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)^6+\left(t-\frac{1}{2}\right)^6+1=2t^6+\frac{30}{4}t^4+\frac{30}{16}t^2+\frac{1}{32}+1.$$

Но $2\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)^3=2\left(t^6+3t^4\cdot\dfrac{3}{4}+3t^2\cdot\dfrac{9}{16}+\dfrac{27}{64}\right)=2t^6+\dfrac{9}{2}t^4+\dfrac{27}{8}t^2+\dfrac{27}{32}$,

значит $2t^6+\dfrac{30}{4}t^4+\dfrac{30}{16}t^2+\dfrac{33}{32}=2t^6+\dfrac{9}{2}t^4+\dfrac{27}{8}t^2+\dfrac{27}{32}$;

$16t^4-8t^2+1=0$;

$\left(4t^2-1\right)^2=0$;

$\left[\begin{array}{l}2t-1=0\\2t+1=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\\x+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Ответ: $\{0;-1\}$.

Решение зачетной карточки 5

1. $\left(x^2+2x-1\right)\left(2x^2+4x-1\right)=10$.

Пусть $x^2+2x-1=t$, тогда $2x^2+4x-1=2t+1$;

$t(2t+1)=10$; $\quad 2t^2+t-10=0$

$t_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\dfrac{-1\pm9}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=2 \\ x^2+2x-1=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ 2x^2+4x+3=0;\ D<0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-3; 1\}$.

2. $\dfrac{6x^6-11x^5+11}{x}=11x+\dfrac{11}{x}-6$.

$6x^6-11x^5+11=11x^2+11-6x$; $\quad 6x^6-11x^5-11x^2+6x=0$; $\quad x\neq 0$

$6x^5-11x^4-11x+6=0$; $\quad f(-1)=-6-11+11+6=0$

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5-11x^4-11x+6 & x+1 \\
\cline{2-2}
\underline{6x^5+\ 6x^4} & 6x^4-17x^3+17x^2-17x+6 \\
\quad -17x^4-11x & \\
\quad \underline{-17x^4-17x^3} & \\
\qquad 17x^3-11x & \\
\qquad \underline{17x^3+17x^2} & \\
\qquad\quad -17x^2-11x & \\
\qquad\quad \underline{-17x^2-17x} & \\
\qquad\qquad 6x+6 & \\
\qquad\qquad \underline{6x+6} & \\
\qquad\qquad\ \ 0 &
\end{array}
$$

$6x^4-17x^3+17x^2-17x+6=0$. $\quad (:x^2)$

Получили возвратное уравнение.

$6x^2-17x+17-\frac{17}{x}+\frac{6}{x^2}=0$; $\quad 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-17\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$.

Пусть $x+\frac{1}{x}=t$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. $6\left(t^2-2\right)-17t+17=0$;

$$6t^2-17t+5=0; \quad t_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-120}}{12}=\frac{17\pm13}{12}; \quad \left[\begin{array}{l} t=\frac{5}{2} \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0 \\ 3x^2-x+3=0;\ D<0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-1;\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$.

3. $\frac{4x^2+10x+9}{2x^2+5x+4}+\frac{2x^2+5x+1}{6x^2+15x+8}=2$.

Положим $2x^2+5x+4=t$.

$4x^2+10x+9=2t+1$; $\quad 6x^2+15x+8=3t-4$; $\quad 2x^2+5x+1=t-3$;

$\frac{2t+1}{t}+\frac{t-3}{3t-4}=2$; $\qquad D(У)$: $\left\{\begin{array}{l} t\neq0 \\ t\neq1\frac{1}{3} \end{array}\right.$;

$\left(2t+1\right)\left(3t-4\right)+t\left(t-3\right)=2t\left(3t-4\right)$;

$6t^2-5t-4+t^2-3t-6t^2+8t=0$; $\quad t^2-4=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right. \in D\left(У\right)$;

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x+4=2 \\ 2x^2+5x+4=-2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2+5x+2=0 \\ 2x^2+5x+6=0;\ D<0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2};-2\right\}$.

4. $\dfrac{6}{x^2-3x-4}+\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}=\dfrac{x}{x+1}$.

$$\frac{6}{(x-4)(x+1)}+\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x}{x+1}; \qquad D(У): \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\frac{6}{(x-4)(x+1)}+\frac{3}{x+1}-\frac{x}{x+1}=0; \qquad \frac{6}{(x-4)(x+1)}+\frac{3-x}{x+1}=0;$$

$$6+(3-x)(x-4)=0; \qquad -x^2+7x-12+6=0;$$

$$x^2-7x+6=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right. \in D(У).$$

Ответ: $\{1;6\}$.

5. $x^2+\dfrac{36x^2}{(x+6)^2}=13$. $\left(-\dfrac{12x^2}{x+6}\right)$

$$x^2-\frac{12x^2}{x+6}+\frac{36x^2}{(x+6)^2}=13-\frac{12x^2}{x+6}; \qquad D(У): \quad x \neq -6;$$

$$\left(x-\frac{6x}{x+6}\right)^2=13-\frac{12x^2}{x+6};$$

$$\left(\frac{x^2}{x+6}\right)^2+\frac{12x^2}{x+6}-13=0.$$

Пусть $\dfrac{x^2}{x+6}=t$, тогда

$$t^2+12t-13=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-13 \\ t=1 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x+6}=-13 \\ \dfrac{x^2}{x+6}=1 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+13x+78=0;\ D<0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-2;3\}$.

6. $(x-1)^4+(x+4)^4=97$.

Пусть $t=\frac{x-1+x+4}{2}=x+1{,}5$, тогда $x=t-1{,}5$;

$(t-2{,}5)^4+(t+2{,}5)^4=97$;

$$+\begin{array}{l}(t+2{,}5)^4=t^4+4t^3\cdot 2{,}5+6t^2\cdot(2{,}5)^2+4t\cdot(2{,}5)^3+(2{,}5)^4\\ (t-2{,}5)^4=t^4-4t^3\cdot 2{,}5+6t^2\cdot(2{,}5)^2-4t\cdot(2{,}5)^3+(2{,}5)^4\\ \hline\end{array}$$

$(t+2{,}5)^4+(t-2{,}5)^4=2t^4+12t^2\cdot(2{,}5)^2+2(2{,}5)^4=97.$

Пусть $t^2=a$.

$2a^2+75a+\frac{625}{8}-97=0$;

$16a^2+600a-151=0$;

$$a_{1,2}=\frac{-300\pm\sqrt{300^2+16\cdot 151}}{16}=\frac{-300\pm 4\cdot\sqrt{75^2+151}}{16}=\frac{-75\pm 76}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{4}\\ a=-\frac{151}{4}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}(x+1{,}5)^2=\frac{1}{4}\\ (x+1{,}5)^2=-\frac{151}{4};\ \varnothing\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x+1{,}5=\frac{1}{2}\\ x+1{,}5=-\frac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-2\end{array}\right..$$

Ответ: $\{-2;-1\}$.

Решение зачетной карточки 6

1. $\dfrac{x^2+2x-15}{x-2}=\dfrac{48}{8-x^3}$; $\qquad D(У)$: $x\neq 2$.

$\dfrac{x^2+2x-15}{x-2}+\dfrac{48}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=0$;

$\left(x^2+2x-15\right)\left(x^2+2x+4\right)+48=0$.

Положим $x^2+2x-15=t$, тогда $x^2+2x+4=t+19$.

$t(t+19)+48=0$; $\quad t^2+19t+48=0$;

$\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-16 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-15=-3 \\ x^2+2x-15=-16 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-12=0 \\ x^2+2x+1=0 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{13} \\ x=-1-\sqrt{13} \\ x=-1 \end{array}\right. \in D(У)$.

О т в е т: $\left\{-1-\sqrt{13};\ -1;\ -1+\sqrt{13}\right\}$.

2. $4x^3-21x+10=0$.

$f(2)=4\cdot 2^3-21\cdot 2+10=0$;

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-21x+10 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^3-8x^2} & 4x^2+8x-5 \\
\quad 8x^2-21x+10 & \\
\quad \underline{8x^2-16x} & \\
\qquad -5x+10 & \\
\qquad \underline{-5x+10} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$4x^2+8x-5=0$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{4}=\dfrac{-4\pm 6}{4}$; $\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-2,5 \end{array}\right.$.

О т в е т: $\{-2,5\ ;\ 0,5\ ;\ 2\}$.

3. $$\frac{3x\left(7x^2-92x-147\right)\left(7x^2-20x-147\right)}{\left(x^2-8x-21\right)^3}=-10.$$

$$\frac{3x^3\left(7\left(x-\frac{21}{x}-8\right)-36\right)\left(7\left(x-\frac{21}{x}-8\right)+36\right)}{x^3\left(x-\frac{21}{x}-8\right)^3}=-10.$$

Положим $x-\frac{21}{x}-8=t$.

$$\frac{3(7t-36)(7t+36)}{t^3}=-10;$$

$10t^3+3\cdot 49t^2-3\cdot 1296=0$; $\quad 10t^3+147t^2-3888=0$.

Так как $3888=3^5\cdot 4^2$ и $t^2\left(10t+147\right)=3^5\cdot 4^2$, то делители

$d=\pm 3;\pm 3\cdot 4;\pm 3\cdot 4^2;\pm 3^2;\pm 3^2\cdot 4;...$

$f(3)\neq 0$; $\quad f(-3)\neq 0$; $\quad f(12)\neq 0$;

$f(-12)=0$, так как $12^2\left(10\cdot(-12)+147\right)=12^2\cdot 3^3$;

$12^2\cdot(27)=12^2\cdot 3^3$;

$$\begin{array}{r|l}
10t^3+147t^2-3888 & t+12 \\ \cline{2-2}
\underline{10t^3+120t^2} \qquad\qquad & 10t^2+27t-324 \\
27t^2-3888 \quad & \\
\underline{27t^2+324t} \qquad\quad & \\
-324t-3888 & \\
\underline{-324t-3888} & \\
0 &
\end{array}$$

$10t^2+27t-324=0$;

$$t_{1,2}=\frac{-27\pm\sqrt{729+4\cdot 10\cdot 324}}{20}=\frac{-27\pm 117}{20};\qquad \left[\begin{array}{l} t=4{,}5 \\ t=-\frac{36}{5}; \end{array}\right.$$

а) $x-\frac{21}{x}-8=-12$;

$x^2+4x-21=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-7\\x=3\end{array}\right.$;

б) $x-\frac{21}{x}-8=\frac{9}{2}$;

$2x^2-25x-42=0$;

$x_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625+336}}{4}=\frac{25\pm31}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=14\\x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$;

в) $x-\frac{21}{x}-8=-\frac{36}{5}$;

$5x^2-4x-105=0$;

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+525}}{5}=\frac{2\pm23}{5}$; $\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-4,2\end{array}\right.$.

Ответ: $\{-7;-4,2;-1,5;3;5;14\}$.

4. $\left(\frac{9}{2x^2-11x+5}+\frac{9}{5+9x-2x^2}+\frac{8x}{4x^2-1}\right)\cdot\frac{2x^2+x}{2x-9}-\frac{10}{x-5}=2$;

а) $2x^2-11x+5=0$;

$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{4}=\frac{11\pm9}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=5\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$;

$2x^2-11x+5=2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-5)(2x-1)$;

б) $-2x^2+9x+5=0$

$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}=\frac{9\pm11}{4}$; $\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$;

$-2x^2+9x+5=-2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)=-(x-5)(2x+1)$;

в) $8x^2-40x+18=0$;

$$4x^2-20x+9=0\,;$$

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{4}=\frac{10\pm 8}{4}\,;\qquad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{9}{2} \end{array}\right.;$$

$$8x^2-40x+18=2(2x-9)(2x-1)\,;$$

$$\frac{9(2x+1)-9(2x-1)+8x(x-5)}{(x-5)(2x-1)(2x+1)}\cdot\frac{x(2x+1)}{2x-9}-\frac{10}{x-5}=2\,;\qquad D(У):\ \begin{cases} x\neq 5 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \\ x\neq 4{,}5 \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{18x+9-18x+9+8x^2-40x}{(x-5)(2x+1)(2x-1)}\cdot\frac{x(2x+1)}{2x-9}-\frac{10}{x-5}=2\,;$$

$$\frac{\left(8x^2-40x+18\right)x(2x+1)}{(2x-9)(x-5)(2x+1)(2x-1)}-\frac{10}{x-5}=2\,;$$

$$\frac{2(2x-9)(2x-1)x}{(2x-9)(x-5)(2x-1)}-\frac{10}{x-5}=2\,;$$

$$\frac{2x}{x-5}-\frac{10}{x-5}=2\,;\qquad \frac{2(x-5)}{x-5}=2\,;\qquad 2=2\,.$$

Ответ: любое x, такое что $\begin{cases} x\neq 5 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \\ x\neq 4{,}5 \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ есть решение.

5. $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.

$$\frac{2x}{x\left(2x-5+\frac{3}{x}\right)}+\frac{13x}{x\left(2x+1+\frac{3}{x}\right)}=6 \qquad D(У):\ \begin{cases} t\neq 6 \\ t\neq 0 \end{cases}$$

Положим $2x+\dfrac{3}{x}+1=t$, тогда $2x+\dfrac{3}{x}-5=t-6$; $\dfrac{2}{t-6}+\dfrac{13}{t}=6$;

$2t+13(t-6)=6t(t-6)$; $\quad 6t^2-51t+78=0$;

$2t^2-17t+26=0$; $\quad t_{1,2}=\dfrac{17\pm\sqrt{289-208}}{4}=\dfrac{17\pm 9}{4}$;

$$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=6,5 \end{array}\right. \in D(У)\,; \quad \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{3}{x}+1=2 \\ 2x+\dfrac{3}{x}+1=\dfrac{13}{2} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-x+3=0;\ D<0 \\ 4x^2-11x+6=0 \end{array}\right. .$$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{8}=\frac{11\pm 5}{8}\,; \quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{0{,}75;\,2\}$.

6. $(x+1)^5+(5-x)^5=1056$.

$(x+1)^5-(x-5)^5=1056$.

Положим $t=\dfrac{x+1+x-5}{2}=x-2$, тогда $x=t+2$;

$(t+3)^5-(t-3)^5=1056$;

$$-\begin{array}{l} (t+3)^5=t^5+5t^4\cdot 3+10t^3\cdot 3^2+10t^2\cdot 3^3+5t\cdot 3^4+3^5 \\ \underline{(t-3)^5=t^5-5t^4\cdot 3+10t^3\cdot 3^2-10t^2\cdot 3^3+5t\cdot 3^4-3^5} \end{array}$$

$(t+3)^5-(t-3)^5=10t^4\cdot 3+20t^2\cdot 3^3+2\cdot 3^5=1056$;

$15t^4+270t^2+243=528$; $\quad 15t^4+270t^2-285=0$; $\quad t^4+18t^2-19=0$;

$$\left[\begin{array}{l} t^2=-19;\ \varnothing \\ t^2=1 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right. ;$$

Ответ: $\{1\,;3\}$.

Решение зачетной карточки 7

1. $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

$\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)}{x^3}=(x-1)(x-2)(x-3)$; $\quad D(У)$: $\quad x\neq 0$;

$(x-1)(x-2)(x-3)\left((x+1)(x+2)(x+3)-x^3\right)=0$;

а) $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2; \\ x=3 \end{array}\right.$

б) $(x+1)(x+2)(x+3)-x^3=0$;

$\left(x^2+3x+2\right)(x+3)-x^3=0$;

$x^3+6x^2+11x+6-x^3=0$;

$6x^2+11x+6=0$; $\quad D<0$.

Ответ: $\{1;2;3\}$.

2. $\left(x^2-x+1\right)^4-10x^2\left(x^2-x+1\right)^2+9x^4=0$. $\quad \left(:x^4\right)$

$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4-10\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2+9=0$.

$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2=9 \\ \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-x+1}{x}=3 \\ \frac{x^2-x+1}{x}=-3 \\ \frac{x^2-x+1}{x}=1 \\ \frac{x^2-x+1}{x}=-1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2-4x+1=0 \\ x^2+2x+1=0 \\ x^2-2x+1=0 \\ x^2+1=0;\ D<0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-1;\ 2-\sqrt{3};\ 1;\ 2+\sqrt{3}\right\}$.

3. $\left(x^2-6x-9\right)^2=x^3-4x^2-9x$.

$$x^2\left(x-6-\frac{9}{x}\right)^2=x^2\left(x-4-\frac{9}{x}\right). \qquad (x\neq 0)$$

Положим $x-\frac{9}{x}-6=t$, тогда $x-\frac{9}{x}-4=t+2$,

и уравнение приобретает вид $t^2=t+2$.

$$\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x-\frac{9}{x}-6=2 \\ x-\frac{9}{x}-6=-1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2-8x-9=0 \\ x^2-5x-9=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-1 \\ x=\frac{5+\sqrt{61}}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{5-\sqrt{61}}{2};\,-1;\,\frac{5+\sqrt{61}}{2};\,9\right\}$.

4. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-4}+\frac{6}{x-5}=0 \qquad x\in\mathbb{Z}; \qquad D(У): \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 2 \\ x\neq 3 \\ x\neq 4 \\ x\neq 5 \end{cases}$

Так как x – целые числа, то:

а) если $x>5$, то все дроби положительные числа это значит $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-4}+\frac{6}{x-5}>0$, т. е. корней нет;

б) если $x<0$, то все дроби отрицательные числа, что означает $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-4}+\frac{6}{x-5}<0$;

в) значения x, равные $\{0;1;2;3;4;5\}$ не принадлежат $D(У)$.

Ответ: решения нет.

5. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 2 = 0$.

$f(1) \neq 0$; $f(-1) \neq 0$; $f(2) \neq 0$; $f(-2) \neq 0$.

Значит, рациональных корней уравнение не имеет. Представим левую часть уравнения в виде произведения двух трехчленов, т.е.

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 =$$
$$= \left(b_0x^2 + b_1x + b_2\right)\left(c_0x^2 + c_1x + c_2\right),$$

где $a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; b_0; b_1; b_2; c_0; c_1; c_2 \in \mathbb{Z}$, но замечаем, что $b_0c_0 = 1$, а $b_2c_2 = 2$.

Проверим $\left(x^2 + b_1x + 2\right)\left(x^2 + c_1x + 1\right) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 2$, тогда

$$\left(x^2 + b_1x + 2\right)\left(x^2 + c_1x + 1\right) =$$
$$= x^4 + \left(b_1 + c_1\right)x^3 + \left(b_1c_1 + 3\right)x^2 + \left(b_1 + 2c_1\right)x + 2,$$

т. е. $\begin{cases} b_1 + c_1 = -1 \\ 3 + b_1c_1 = -9 \\ 2c_1 + b_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} b_1 + c_1 = -1 \\ 2c_1 + b_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} c_1 = 3 \\ b_1 = -4 \end{cases}$.

Эта пара подходит для $b_1c_1 = -12$.

Итак,

$$x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 2 = \left(x^2 - 4x + 2\right)\left(x^2 + 3x + 1\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{2 - \sqrt{2};\ 2 + \sqrt{2};\ -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. $1+\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{5}{x^2}$; $\qquad D(y):\ \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 0 \end{cases}$;

$x^2\left(x^2+4x+4\right)+4x^2=5\left(x^2+4x+4\right)$;

$x^4+4x^3+4x^2+4x^2-5x^2-20x-20=0$;

$x^4+4x^3+3x^2-20x-20=0$;

$f(-1)=0$;

$$\begin{array}{l|l} x^4+4x^3+3x^2-20x-20 & \ \ x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+\ \ x^3} & x^3+3x^2-20 \\ \quad 3x^3+3x^2 & \\ \quad \underline{3x^3+3x^2} & \\ \qquad\quad -20x-20 & \\ \qquad\quad \underline{-20x-20} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\varphi(x)=x^3+3x^2-20$;

$\varphi(2)=0$;

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2-20 & \ \ x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-2x^2} & x^2+5x+10 \quad (D<0) \\ \quad 5x^2-20 & \\ \quad \underline{5x^2-10x} & \\ \qquad 10x-20 & \\ \qquad \underline{10x-20} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ответ: $\{-1;2\}$.

Решение зачетной карточки 8

1. $\dfrac{3x^2+30x+75}{x^3+5x^2-25x-125}-\dfrac{x^4-10x^2+9}{\left(x^2-4x\right)^2-2x^2+8x-15}=2$.

$$\frac{3\left(x^2+10x+25\right)}{(x-5)\left(x^2+5x+25\right)+5x(x-5)}-\frac{\left(x^2-9\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-4x\right)^2-2\left(x^2-4x\right)-15}=2;$$

$$\frac{3(x+5)^2}{(x-5)(x+5)^2}-\frac{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}{\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2-4x+3\right)}=2; \qquad D(У):\ \begin{cases} x\ne\pm5\\ x\ne3\\ x=\pm1\end{cases}$$

$$\frac{3}{x-5}-\frac{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}{(x-5)(x+1)(x-1)(x-3)}=2;$$

$$\frac{3}{x-5}-\frac{x+3}{x-5}=2; \qquad \frac{3-x-3}{x-5}=2; \qquad -x=2x-10; \qquad x=3\frac{1}{3}\in D(У).$$

Ответ: $x=3\frac{1}{3}$.

2. $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{28}{15}$; $\qquad D(У):\ \begin{cases} x\ne\pm1\\ x=\pm3\end{cases}$;

$$1-\frac{1}{x-1}+1+\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x-3}+1+\frac{1}{x+3}-\frac{28}{15};$$

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{28}{15}; \qquad \frac{1}{x^2-1}=\frac{3}{x^2-9}+\frac{14}{15};$$

Пусть $x^2-1=t$. $\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{t-8}+\dfrac{14}{15}$; $\qquad 15(t-8)=45t+14\left(t^2-8t\right)$;

$$15t-120=45t+14t^2-112t; \quad 14t^2-82t+120=0; \quad 7t^2-41t+60=0;$$

$$t_{1,2}=\frac{41\pm\sqrt{1681-1680}}{14}=\frac{41\pm1}{14}; \quad \left[\begin{array}{l} t=3\\ t=\frac{20}{7}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2-1=3\\ x^2-1=\frac{20}{7}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2=4\\ x^2=\frac{27}{7}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-2\\ x=3\sqrt{\frac{3}{7}}\\ x=-3\sqrt{\frac{3}{7}}\end{array}\right. \in D(У).$$

Ответ: $\left\{2;-2;3\sqrt{\frac{3}{7}};-3\sqrt{\frac{3}{7}}\right\}$.

3. $x^2+\frac{66\left(x^2-610\right)}{(x+26)^2}=15$. $\quad D(У)$: $x \neq -26$;

$x^2-676=(x-26)(x+26)$;

$610=676-66$;

$x^2-610=x^2-676+66$;

$66\left(x^2-610\right)=66\left(x^2-676\right)+66^2$;

$x^2+\frac{66\left(x^2-676\right)}{(x+26)^2}+\frac{66^2}{(x+26)^2}=15$;

$x^2+\frac{66(2x-(x+26))}{x+26}+\frac{66^2}{(x+26)^2}=15$;

$x^2+\frac{2x\cdot 66}{x+26}+\frac{66^2}{(x+26)^2}-\frac{66(x+26)}{x+26}=15$;

$\left(x+\frac{66}{x+26}\right)^2=81$; $\quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{66}{x+26}=9 \\ x+\frac{66}{x+26}=-9 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2+26x+66=9x+234 \\ x^2+26x+66=-9x-234 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x^2+17x-168=0 \\ x^2+35x+300=0 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-24 \\ x=-20 \\ x=-15 \end{array}\right. \in D(У)$.

Ответ: $\{-24; -20; -15; 7\}$.

4. $\dfrac{(x-1)^4+(x-3)^4}{4{,}1}=\left(x-1-\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(x-3+\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3.$

Положим $t=\dfrac{x-1+x-3}{2}=x-2 \qquad x=t+2.$

$$\frac{(t+1)^4+(t-1)^4}{4{,}1}=\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3;$$

а)
$$\begin{aligned}&(t+1)^4=t^4+4t^3+6t^2+4t+1\\ +\;&(t-1)^4=t^4-4t^3+6t^2-4t+1\end{aligned}$$

$$(t+1)^4+(t-1)^4=2\left(t^4+6t^2+1\right);$$

б)
$$\begin{aligned}&\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=t^3+3t^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3t\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\\ +\;&\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=t^3-3t^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+3t\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\end{aligned}$$

$$\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=2\left(t^3+t\right).$$

Уравнение примет вид $\dfrac{2\left(t^4+6t^2+1\right)}{4{,}1}=2\left(t^3+t\right).$

$10t^4+60t^2+10=41t^3+41t;$

$10t^4-41t^3+60t^2-41t+10=0$ – возвратное уравнение.

$10t^2-41t+60-\dfrac{41}{t}+\dfrac{10}{t^2}=0.$ Пусть $t+\dfrac{1}{t}=a$, тогда

$t^2+\dfrac{1}{t^2}=a^2-2;\quad 10\left(a^2-2\right)-41a+60=0;\quad 10a^2-41a+40=0;$

$a_{1,2}=\dfrac{41\pm\sqrt{1681-1600}}{20}=\dfrac{41\pm9}{20};\qquad \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{5}{2}\\ a=\dfrac{8}{5}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}\\ t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{8}{5}\end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l}2t^2-5t+2=0\\ 5t^2-8t+5=0;\ D<0\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x-2=2\\ x-2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=2{,}5\end{array}\right..$

Ответ: $\{2{,}5;\ 4\}.$

5. $\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{49}{45}$; $\quad \dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2}{\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\dfrac{49}{45}$;

$$\frac{x^2\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{49}{45};$$

$x+\dfrac{1}{x}+1=t$; $\quad x+\dfrac{1}{x}+2=t+1$; $\quad x+\dfrac{1}{x}=t-1$;

$\dfrac{t^2}{(t+1)(t-1)}=\dfrac{49}{45}$; $\quad 45t^2=49\left(t^2-1\right)$; $\quad 4t^2=49$;

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{7}{2} \\ t=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{7}{2} \\ x+\dfrac{1}{x}+1=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0 \\ 2x^2+9x+2=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \\ x=-\dfrac{9+\sqrt{65}}{4} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{9+\sqrt{65}}{4};\ \dfrac{-9+\sqrt{65}}{4};\ \dfrac{1}{2};\ 2\right\}$.

6. $12x^6+52x^5-13x^4-156x^3-13x^2+52x+12=0 \quad \left(:x^3\right)$;

Получим возвратное уравнение

$12x^3+52x^2-13x-156-\dfrac{13}{x}+\dfrac{52}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}=0$;

$12\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+52\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-156=0$.

Пусть $x+\dfrac{1}{x}=t$.

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$; $\quad x^3+\dfrac{1}{x^3}=t^3-3t$;

$12\left(t^3-3t\right)+52\left(t^2-2\right)-13t-156=0$;

$12t^3+52t^2-49t-260=0$; $\quad f(-4)=0$;

$$\begin{array}{l|l} 12t^3+52t^2-49t-260 & t+4 \\ \hline \underline{12t^3+48t^2} & 12t^2+4t-65 \\ \quad 4t^2-49t & \\ \quad \underline{4t^2+16t} & \\ \qquad -65t-260 & \\ \qquad \underline{-65t-260} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$12t^2+4t-65=0\ ;\quad t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+780}}{12}=\frac{-2\pm 28}{12};\quad \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{5}{2} \\ t=\dfrac{13}{6} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2} \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+\dfrac{1}{x}=-4 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} 2x^2+5x+2=0 \\ 6x^2-13x+6=0 \\ x^2+4x+1=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{2}{3} \\ x=-2-\sqrt{3} \\ x=-2+\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-2-\sqrt{3}\,;-2;\,-\frac{1}{2}\,;\,-2+\sqrt{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{3}{2}\right\}$.

Содержание